

X-ENS-ESPCI 2021 – Un corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Frédéric Denizet – professeur en M.P. au lycée Fénélon

Partie I

- I.1. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue de K fermé borné de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}$ elle est donc bornée et atteint ses bornes sur K , ce qui assure que $\|P\|_K \in \mathbb{R}$.
- I.2. $\|\cdot\|_K$ est la norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées sur K à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont $\mathbb{C}[X]$ peut être considéré comme un sous-espace en identifiant les polynômes et leurs fonctions polynomiales associées sur K (on remarquera que cette identification est valide car K est infini et que les fonctions polynomiales sont bornées sur K car K est fermé borné).
- I.3. Soit $z \in K$, $|Q(z)R(z)| \leq |Q(z)| |R(z)| \leq \|Q\|_K \|R\|_K$ donc $\|QR\|_K \leq \|Q\|_K \|R\|_K$.
- I.4. Ainsi qu'on la vu au I.1. pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ atteint ses bornes sur K donc il existe $z \in K$ tel que $\|P\|_K = |P(z)|$.
Supposons donc que pour Q et R non nuls on ait $\|QR\|_K = \|Q\|_K \|R\|_K$ et posons $z_0 \in K$ tel que $\|QR\|_K = |(QR)(z_0)|$.
On a $\|QR\|_K = |Q(z_0)R(z_0)| \leq \|Q\|_K \|R\|_K = \|QR\|_K$ donc $|Q(z_0)R(z_0)| = \|Q\|_K \|R\|_K$.
Puis $\|Q\|_K \|R\|_K = |Q(z_0)R(z_0)| \leq |Q(z_0)| \|R\|_K$ avec $\|R\|_K > 0$ donc $|Q(z_0)| \geq \|Q\|_K$ et ainsi $|Q(z_0)| = \|Q\|_K$.
Enfin l'égalité $|Q(z_0)R(z_0)| = \|Q\|_K \|R\|_K$ avec $|Q(z_0)| = \|Q\|_K \neq 0$ assure $|R(z_0)| = \|R\|_K$.
- I.5. On utilise les notations introduites par l'énoncé et on pose A tel que, pour tout $z \in K$, $|z| \leq A$ (A existe car K est borné).
Soient $\rho < 0$ et $z \in K$, $Q_\rho(z)R_\rho(z) = z^2 - (a+b)z + (ab + (a-b)^2\rho - (a-b)^2\rho^2)$.
Donc $|Q_\rho(z)R_\rho(z)| \leq A^2 + |a+b|A + |ab| + |a-b|^2(\rho^2 - \rho)$;
et ainsi $\|Q_\rho R_\rho\|_K \leq B + |a-b|^2(\rho^2 - \rho)$ où on a posé $B = A^2 + |a+b|A + |ab|$.
De plus $\|Q_\rho\|_K \geq |Q_\rho(b)| = |a-b|(1-\rho)$ et $\|R_\rho\|_K \geq |R_\rho(a)| = |a-b|(1-\rho)$;
donc $\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K \geq |a-b|^2(1-\rho)^2$
et ainsi $\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K - \|Q_\rho R_\rho\|_K \geq |a-b|^2(1-\rho) - B \xrightarrow{\rho \rightarrow -\infty} +\infty$ ce qui assure qu'il existe bien ρ tel que $\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K > \|Q_\rho R_\rho\|_K$ donc 1 ne majore pas le quotient $\frac{\|Q_\rho\|_K \|R_\rho\|_K}{\|Q_\rho R_\rho\|_K}$
où les polynômes Q_ρ et R_ρ sont de degrés 1 donc dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}_m[X]$ ce qui assure que $C_{n,m}^K > 1$.
- I.6. L'application f est continue car le produit de polynômes est continu (bilinéaire en dimension finie) et la norme est continue. De plus E est trivialement borné et est un fermé de V car c'est l'image réciproque du fermé $(1,1)$ de $\mathbb{R}^2$ par l'application continue $(Q, R) \mapsto (\|Q\|_K, \|R\|_K)$. Donc f est bornée et atteint ses bornes sur E ce qui assure l'existence du couple (Q_0, R_0) voulu.
- I.7. Notons q et r les coefficients dominants de Q_0 et R_0 et posons $Q_1 = \frac{Q_0}{q}$ et $R_1 = \frac{R_0}{r}$.
Les polynômes Q_1 et R_1 sont unitaires, de plus $\frac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1 R_1\|_K} = \frac{1}{\|Q_0 R_0\|_K}$.

Par définition $\frac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1 R_1\|_K} \leq C_{n,m}^K$.

Par ailleurs pour tous Q et R non nuls dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}_m[X]$ en posant $\tilde{Q} = \frac{Q}{\|Q\|_K}$ et $\tilde{R} = \frac{R}{\|R\|_K}$ on a :

$$\|Q_0 R_0\|_K \leq \left\| \tilde{Q} \tilde{R} \right\|_K \text{ i.e. } \frac{1}{\|Q_0 R_0\|_K} \geq \frac{1}{\left\| \tilde{Q} \tilde{R} \right\|_K} \text{ i.e. } \frac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1 R_1\|_K} \geq \frac{\|Q\|_K \|R\|_K}{\|QR\|_K}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tous Q et R non nuls dans $\mathbb{C}_n[X]$ et $\mathbb{C}_m[X]$, on en déduit que $\frac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1 R_1\|_K} \geq C_{n,m}^K$ et donc $\frac{\|Q_1\|_K \|R_1\|_K}{\|Q_1 R_1\|_K} = C_{n,m}^K$

Partie II

2.8. Q est scindé donc s'écrit $Q = \alpha \prod_{k=1}^d (X - a_k)$ où α est son coefficient dominant et $a_1, \dots, a_d$ sont ses racines.

On note $\mathcal{A} = \{\theta \in [0, 2\pi] \mid Q(e^{i\theta}) = 0\}$ (cet ensemble est fini).

On pose $\mathcal{B} = [0, 2\pi] \setminus \mathcal{A}$, on a pour tout $\theta \in \mathcal{B}$, $\ln |Q(e^{i\theta})| = \ln |\alpha| + \sum_{k=1}^n \ln |e^{i\theta} - a_k|$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $|a_k| \neq 1$, $\theta \mapsto \ln |e^{i\theta} - a_k|$ est continue et donc intégrable (au sens usuel) sur $[0, 2\pi]$.

Si $|a_k| = 1$ on pose $\theta_k \in [0, 2\pi]$ tel que $e^{i\theta_k} = a_k$ (θ_k est unique sauf si $a_k = 1$ auquel cas on travaille à la fois pour 0 à droite et 2π à gauche), $\theta \mapsto \ln |e^{i\theta} - a_k|$ est continue sur $[0, \theta_k[\cup]\theta_k, 2\pi]$ il faut s'assurer de son intégrabilité au voisinage de θ_k à droite et à gauche.

Or pour $\theta \in [0, \theta_k[\cup]\theta_k, 2\pi]$:

$$\ln |e^{i\theta} - a_k| = \ln |e^{i\theta} - e^{i\theta_k}| = \ln |e^{i(\theta - \theta_k)} - 1| = \ln \left| \theta - \theta_k + \underset{\theta \rightarrow \theta_k}{o}(\theta - \theta_k) \right| = \underset{\theta \rightarrow \theta_k}{o}(|\theta - \theta_k|^{-\frac{1}{2}}).$$

Ce qui assure l'intégrabilité de $\theta \mapsto \ln |e^{i\theta} - a_k|$ sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1.

En conclusion $\theta \mapsto \ln |Q(e^{i\theta})|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1.

2.9. Pour $p > 0$, $M_p(Q)$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle sur $[0, 2\pi]$ (car Q admet un nombre fini de racines donc $Q(e^{i\theta})$ ne peut s'annuler qu'un nombre fini de fois sur $[0, 2\pi]$). Ceci assure que $M_p(Q) > 0$.

2.10. Puisque $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, pour vérifier que φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ il suffit de vérifier que $p \mapsto M_p(Q)$ l'est, ce que l'on fait en appliquant le théorème de continuité des intégrales à paramètre dont on vérifie les hypothèses :

i. Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \mapsto |Q(e^{i\theta})|^p$ est continue (par morceaux) sur $[0, 2\pi]$.

ii. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $p \mapsto |Q(e^{i\theta})|^p$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

iii. $|Q|$ est continue sur $\mathbb{D}$ qui est un fermé borné donc est bornée sur $\mathbb{D}$ ce qui assure l'existence de $T > 1$ tel que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $|Q(e^{i\theta})| \leq T$.

Soit alors $b > 0$, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $p \in]0, b]$, on a $|Q(e^{i\theta})|^p \leq T^b$ où $\theta \mapsto T^b$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On en conclut que, pour tout $b > 0$, $p \mapsto M_p(Q)$ est continue sur $]0, b]$ ce qui assure que $p \mapsto M_p(Q)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc que φ est continue sur $]0, +\infty[$

Il reste à vérifier la continuité de φ en 0, i.e. à justifier que $\lim_{p \rightarrow 0} (M_p(Q)) = 1$, ce que l'on fait grâce au théorème de convergence dominée dont on vérifie les hypothèses, on reprend pour cela le T défini ci-dessus et on pose $\mathcal{A} = \{\theta \in [0, 2\pi] \mid Q(e^{i\theta}) = 0\}$ (qui est fini).

i. Pour tout $p \in]0, 1]$, $\theta \mapsto |Q(e^{i\theta})|^p$ est continue (par morceaux) sur $[0, 2\pi]$.

i. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\lim_{p \rightarrow 0} (|Q(e^{i\theta})|^p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \notin \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } \theta \in \mathcal{A} \end{cases}$.

iii. La fonction $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \notin \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } \theta \in \mathcal{A} \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$.

iv. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $p \in]0, 1]$, on a $|Q(e^{i\theta})|^p \leq T$ où $\theta \mapsto T$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

En conclusion $\lim_{p \rightarrow 0} (M_p(Q)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = 1$, ce qui assure la continuité de φ en 0.

2.11. Là encore, puisque $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, pour vérifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ il suffit de vérifier que $p \mapsto M_p(Q)$ l'est, ce que l'on fait en appliquant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre dont on vérifie les hypothèses en posant $f : (p, t) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi] \mapsto |Q(e^{it})|^p$.

On note toujours $\mathcal{A} = \{t \in [0, 2\pi] \mid Q(e^{it}) = 0\}$, $\mathcal{B} = [0, 2\pi] \setminus \mathcal{A}$, et $T > 1$ tel que pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|Q(e^{it})| \leq T$.

i. Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto f(p, t)$ est continue et donc intégrable sur $[0, 2\pi]$ (segment).

ii. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $p \mapsto f(p, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

— si $t \in \mathcal{A}$, $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\partial_1 f(p, t) = 0$;

— si $t \in \mathcal{B}$, $\forall p \in \mathbb{R}_+^*$, $\partial_1 f(p, t) = \ln |Q(e^{it})| |Q(e^{it})|^p$;

iii. Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \partial_1 f(p, t)$ est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ (elle est même continue car $\lim_{u \rightarrow 0^+} (u^p \ln(u)) = 0$).

iv. Soit un segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $p \in [a, b]$ et pour tout $u \in]0, T]$ on a $|u^p \ln(u)| \leq |(u^a + u^b) \ln(u)|$ or la fonction $u \mapsto (u^a + u^b) \ln(u)$ est continue sur $]0, T]$ et prolongeable par continuité en 0 donc elle est bornée sur $]0, T]$, on peut ainsi poser U tel que, pour tout $u \in]0, T]$, $|(u^a + u^b) \ln(u)| \leq U$.

Alors, pour tout $p \in [a, b]$ et pour tout $t \in \mathcal{B}$, $|\partial_1 f(p, t)| = |\ln |Q(e^{it})| |Q(e^{it})|^p|$ où $|Q(e^{it})|^p \in]0, T]$ donc $|\partial_1 f(p, t)| \leq U$.

On a finalement : $\forall (p, t) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$, $|\partial_1 f(p, t)| \leq U$ où $t \mapsto U$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On en conclut que, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, $p \mapsto M_p(Q)$ est dérivable sur $[a, b]$ ce qui assure que $p \mapsto M_p(Q)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donc que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

De plus, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$: $\varphi'(p) = \frac{1}{2\pi M_p(Q)} \int_0^{2\pi} \ln |Q(e^{it})| |Q(e^{it})|^p dt$.

2.12. Pour déterminer la limite de φ' en 0^+ on applique le théorème 1 (de convergence dominée)

à $p \mapsto \int_0^{2\pi} \ln |Q(e^{it})| |Q(e^{it})|^p dt$ dont on vérifie les hypothèses avec les mêmes notations

qu'à 2.11., en considérant une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \partial_1 f(p_n, t)$ i.e. $f_n : t \mapsto \begin{cases} \ln |Q(e^{it})| |Q(e^{it})|^{p_n} & \text{si } t \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } t \in \mathcal{B} \end{cases}$.

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 2\pi]$ (cf ci-dessus).

ii. Soit $t \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(t)) = \begin{cases} \ln |Q(e^{it})| & \text{si } t \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } t \in \mathcal{B} \end{cases}$.

iii. La fonction $\psi : t \mapsto \begin{cases} \ln |Q(e^{it})| & \text{si } t \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } t \in \mathcal{B} \end{cases}$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1 (cf 2.8.).

iv Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f_n(t)| \leq T\psi(t)$ où $T\psi$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1.

En conclusion et par caractérisation séquentielle de la limite on a :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left(\int_0^{2\pi} \ln |Q(e^{it})| |Q(e^{it})|^p dt \right) = \int_0^{2\pi} \ln |Q(e^{it})| dt = 2\pi \ln(M(Q));$$

comme $\lim_{p \rightarrow 0} (M_p(Q)) = 1$ on a donc $\lim_{p \rightarrow 0} (\varphi'(t)) = \ln(M(Q))$.

Ceci assure que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = \ln(M(Q))$ et donc que pour p au voisinage de 0 : $\varphi(p) = \varphi(0) + \varphi'(0)p + o_{p \rightarrow 0}(p) = \ln(M(Q))p + o_{p \rightarrow 0}(p)$.

Enfin pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, on a $M_p(Q)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\frac{1}{p}\varphi(p)\right) = \exp\left(\ln(M(Q)) + o_{p \rightarrow 0}(1)\right)$

d'où $\lim_{p \rightarrow 0} \left(M_p(Q)^{\frac{1}{p}}\right) = \exp(\ln(M(Q))) = M(Q)$

2.13. On utilise les notations données par l'énoncé.

On a pour tout $\rho \in [0, 1[$, $F(\rho) = \frac{1}{2} \ln |1 - \rho e^{i\theta}|^2 = \frac{1}{2} \ln (1 - 2\rho \cos(\theta) + \rho^2)$.

Donc pour tout $\rho \in [0, 1[$, $F'(\rho) = \frac{\rho - \cos(\theta)}{(1 - \rho e^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta})} = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\theta}}{(1 - \rho e^{i\theta})} + \frac{e^{-i\theta}}{(1 - \rho e^{-i\theta})} \right);$

i.e. $F'(\rho) = -\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\theta}}{(1 - \rho e^{i\theta})} \right) = -\operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e^{ik\theta} \right) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k e^{i(k+1)\theta} \right)$.

Par intégration terme-à-terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence,

pour tout $\rho \in [0, 1[$, $F(\rho) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} \rho^{k+1} e^{i(k+1)\theta} \right) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \rho^n e^{in\theta} \right)$.

Notamment pour $\rho = r$ on a $\ln |1 - z| = F(r) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \right)$.

2.14. $M(X - z) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{it} - z| dt \right) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |1 - ze^{-it}| dt \right)$.

Donc $M(X - z) = \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n e^{-int}}{n} dt \right) \right)$.

La série de fonction $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : t \mapsto \frac{z^n e^{-int}}{n}$ est une série de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ qui converge normalement sur $[0, 2\pi]$ (car pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|u_n(t)| \leq |z|^n$ avec $|z| < 1$), on peut donc intervertir série et intégrale.

D'où $M(X - z) = \exp \left(-\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{z^n e^{-int}}{n} dt \right) \right)$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = 0$ donc $M(X - z) = \exp(0) = 1$.

$$\begin{aligned} M(X - z^{-1}) &= \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{it} - z^{-1}| dt \right) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\ln |z^{-1}| + \ln |1 - ze^{it}|) dt \right) \\ &= \exp \left(\ln |z^{-1}| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |1 - ze^{it}| dt \right). \end{aligned}$$

Or tout comme au dessus $\int_0^{2\pi} \ln |1 - ze^{it}| dt = 0$.

On a donc $M(X - z^{-1}) = \exp(\ln |z^{-1}|) = |z^{-1}|$.

- 2.15. On utilise les notations de l'énoncé avec de plus $\psi \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\psi}$, la question 2.14. assure que g est constante égale à 1 et on veut montrer que g tend vers $M(X - z)$ en 1.

Pour cela on applique le théorème de convergence dominée avec $D = [0, 2\pi] \setminus \{\psi\}$.

Montrons dans un premier temps l'inégalité que « remarque » l'énoncé, on pose $r \in [0, 1[$ et $t \in [0, 2\pi]$ on a : $|e^{it} - re^{i\psi}| = |e^{i(t-\psi)} - r| \geq |\operatorname{Im}(e^{i(t-\psi)} - r)| = |\sin(t - \psi)|$.

On a pour $r \in [0, 1[$, $g(r) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{it} - re^{i\psi}| dt \right)$.

Pour tout $t \in D$, $\lim_{r \rightarrow 1} (\ln |e^{it} - re^{i\psi}|) = \ln |e^{it} - e^{i\psi}|$

De plus pour tous $r \in [0, 1[$ et $t \in D$, $|\sin(t - \psi)| \leq |e^{it} - re^{i\psi}| \leq 2$

donc $|\ln |e^{it} - re^{i\psi}|| \leq \ln(2) - \ln |\sin(t - \psi)|$ où $t \mapsto \ln(2) - \ln |\sin(t - \psi)|$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$ au sens de la définition 1 (intégrale impropre convergente en ψ).

On en déduit que $\lim_{r \rightarrow 1} (g(r)) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{it} - e^{i\psi}| dt \right) = M(X - z)$, ce qui assure $M(X - z) = 1$.

- 2.16. Les questions précédentes assurent que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $M(X - z) = \max \{1, |z|\}$.

Or $M(Q) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \lambda \prod_{k=1}^n (e^{it} - a_k) \right| dt \right) = |\lambda| \prod_{k=1}^n \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |e^{it} - a_k| dt \right)$.

Donc $M(Q) = |\lambda| \prod_{k=1}^n M(X - a_k) = |\lambda| \prod_{k=1}^n \max \{1, |a_k|\}$

Partie III

- 3.17. Par linéarité il suffit de montrer ce résultat pour un monôme, on suppose donc $P = X^d$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$.

On a donc $\int_0^{2\pi} (z + re^{it})^d dt = \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} z^{d-k} r^k \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = z^d = P(z)$.

- 3.18. On a déjà justifié qu'il existait $z \in \mathbb{D}$ tel que $\|P\|_{\mathbb{D}} = |P(z)|$, pour un tel z on note $z = \rho e^{i\psi}$ avec $\rho \in [0, 1]$.

On pose $r = 1 - \rho$ alors pour tout $t \in [0, 2\pi]$, on a $z + re^{it} \in \mathbb{D}$ donc $|P(z + re^{it})| \leq |P(z)|$

Ainsi avec 3.17 :

$$|P(z)| = \left| \int_0^{2\pi} P(z + re^{it}) dt \right| \leq \int_0^{2\pi} |P(z + re^{it})| dt \leq \int_0^{2\pi} |P(z)| dt = |P(z)|.$$

On a donc $\int_0^{2\pi} (|P(z + re^{it})| - |P(z)|) dt = 0$ où la fonction intégrée est continue et de signe constant ce qui assure que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|P(z + re^{it})| - |P(z)| = 0$.

Notamment $P(z + re^{i\psi}) = P(z)$ où $z + re^{i\psi} = e^{i\psi} \in \partial\mathbb{D}$.

Il existe donc un élément de $\partial\mathbb{D}$ où est atteinte $\|P\|_{\partial\mathbb{D}}$ ce qui assure que $\|P\|_{\partial\mathbb{D}} = \|P\|_{\mathbb{D}}$.

- 3.19. On utilise les notations de l'énoncé, on remarque que, pour tout $z \in \partial\mathbb{D}$, $P(z) = Q(z^{-1})$ ce qui assure que $\|P\|_{\partial\mathbb{D}} = \|Q\|_{\partial\mathbb{D}}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si $|z| \leq 1$ on a $|P(z)| \leq \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \leq \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \max\{1, |z|^d\}$.

Si $|z| > 1$, on a $|P(z)| = |z|^d |Q(z^{-1})| \leq \|Q\|_{\partial\mathbb{D}} \max\{1, |z|^d\} = \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \max\{1, |z|^d\}$.

On a donc toujours $|P(z)| \leq \|P\|_{\partial\mathbb{D}} \max\{1, |z|^d\}$.

- 3.20. Sans perte de généralité on peut supposer que les racines de Q sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et que les racines de R sont $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_{n+m}$.

On note de plus λ_Q et λ_R les coefficients dominants de Q et R , on a $\lambda_Q \lambda_R = \lambda$.

Il existe $(u, v) \in \partial\mathbb{D}^2$ tel que $|Q(u)| = \|Q\|_{\mathbb{D}}$ et $|R(v)| = \|R\|_{\mathbb{D}}$.

$$\text{Alors } \|Q\|_{\mathbb{D}} = |\lambda_Q| \prod_{i=1}^n |u - \alpha_i| \leq |\lambda_Q| \prod_{i=1}^n \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}.$$

$$\text{De même } \|R\|_{\mathbb{D}} = |\lambda_R| \prod_{i=n+1}^{n+m} |v - \alpha_i| \leq |\lambda_R| \prod_{i=n+1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}.$$

$$\text{Donc } \|Q\|_{\mathbb{D}} \|R\|_{\mathbb{D}} \leq |\lambda| \prod_{i=1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}.$$

- 3.21. Déterminons les racines de S .

$$\text{On a } S = \lambda \prod_{i=1}^{m+n} (uX - v - \alpha_i(X - 1)) = \lambda \prod_{i=1}^{m+n} ((u - \alpha_i)X - (v - \alpha_i)).$$

Notons $A = \{i \in \llbracket 1, m+n \rrbracket \mid \alpha_i = u\}$ et $B = \{i \in \llbracket 1, m+n \rrbracket \mid \alpha_i \neq u\}$.

$$\begin{aligned} S &= \lambda \prod_{i \in A} ((-v + \alpha_i)) \prod_{i \in B} ((u - \alpha_i)X - (v - \alpha_i)) \\ &= \lambda \prod_{i \in A} ((-v + \alpha_i)) \prod_{i \in B} ((u - \alpha_i)) \prod_{i \in B} \left(X - \frac{v - \alpha_i}{u - \alpha_i} \right). \end{aligned}$$

Donc les racines de S sont les $\frac{v - \alpha_i}{u - \alpha_i}$ pour $i \in B$ et son coefficient dominant est

$$\lambda \prod_{i \in A} ((-v + \alpha_i)) \prod_{i \in B} ((u - \alpha_i)).$$

$$\text{Donc } M(S) = |\lambda| \prod_{i \in A} |(-v + \alpha_i)| \prod_{i \in B} |(u - \alpha_i)| \prod_{i \in B} \max\left\{1, \left| \frac{v - \alpha_i}{u - \alpha_i} \right| \right\}.$$

$$\text{Ainsi } M(S) = |\lambda| \prod_{i \in A} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\} \prod_{i \in B} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\};$$

$$\text{et finalement } M(S) = |\lambda| \prod_{i=1}^{n+m} \max\{|u - \alpha_i|, |v - \alpha_i|\}.$$

3.20. donne alors $\|Q\|_{\mathbb{D}} \|R\|_{\mathbb{D}} \leq M(S)$.

$$\begin{aligned} 3.22. \quad M(S) &= \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\ln |e^{it} - 1|^{m+n} + \ln \left| P \left(\frac{ue^{it} - v}{e^{it} - 1} \right) \right| \right) dt \right) \\ &= M((X - 1)^{m+n}) \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| P \left(\frac{ue^{it} - v}{e^{it} - 1} \right) \right| dt \right). \end{aligned}$$

On a $M((X - 1)^{m+n}) = 1$, donc

$$M(S) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| P \left(\frac{ue^{it} - v}{e^{it} - 1} \right) \right| dt \right).$$

D'après 3.19. on a donc :

$$\begin{aligned} M(S) &\leq \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\|P\|_{\mathbb{D}} \max \left\{ 1, \left| \frac{ue^{it} - v}{e^{it} - 1} \right|^{n+m} \right\} \right) dt \right) \\ M(S) &\leq \|P\|_{\mathbb{D}} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ 1, \left| \frac{ue^{it} - v}{e^{it} - 1} \right|^{n+m} \right\} \right) dt \right) \\ M(S) &\leq \|P\|_{\mathbb{D}} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|e^{it} - 1|^{n+m}} \max \left\{ |e^{it} - 1|^{n+m}, |ue^{it} - v|^{n+m} \right\} \right) dt \right) \\ M(S) &\leq \|P\|_{\mathbb{D}} \frac{\exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|^{n+m}, |ue^{it} - v|^{n+m} \right\} \right) dt \right)}{M(X - 1)^{m+n}} \\ M(S) &\leq \|P\|_{\mathbb{D}} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|^{n+m}, (|u| |e^{it} - w|)^{n+m} \right\} \right) dt \right) \\ M(S) &\leq \|P\|_{\mathbb{D}} \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|^{n+m}, |e^{it} - w|^{n+m} \right\} \right) dt \right) \\ M(S) &\leq \|P\|_{\mathbb{D}} \exp \left(\frac{n+m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|, |e^{it} - w| \right\} \right) dt \right) \end{aligned}$$

3.23. Il s'agit donc de montrer que :

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|, |e^{it} - w| \right\} \right) dt \leq \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|, |e^{it} + 1| \right\} \right) dt$$

Or w s'écrit $w = e^{i\psi}$ pour $\psi \in [0, 2\pi[$, de plus pour tout réel θ , $|e^{i\theta} - 1| = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|$.

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|, |e^{it} - w| \right\} \right) dt = \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ |e^{it} - 1|, |e^{it} - e^{i\psi}| \right\} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \ln \left(\max \left\{ \left| \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right|, \left| \sin \left(\frac{t - \psi}{2} \right) \right| \right\} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\pi} \ln \left(\max \left\{ |\sin(t)|, \left| \sin \left(t - \frac{\psi}{2} \right) \right| \right\} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\psi/2} \ln \left(\max \left\{ \sin(t), \sin \left(\frac{\psi}{2} - t \right) \right\} \right) dt + 2 \int_{\psi/2}^{\pi} \ln \left(\max \left\{ \sin(t), \sin \left(t - \frac{\psi}{2} \right) \right\} \right) dt \\ &= 2 \int_0^{\psi/4} \ln \left(\sin \left(\frac{\psi}{2} - t \right) \right) dt + 2 \int_{\psi/4}^{\psi/2} \ln (\sin(t)) dt + 2 \int_{\psi/2}^{\pi/2+\psi/4} \ln (\sin(t)) dt \\ &\quad + 2 \int_{\pi/2+\psi/4}^{\pi} \ln \left(\sin \left(t - \frac{\psi}{2} \right) \right) dt \\ &= 4 \int_{\psi/4}^{\psi/2} \ln (\sin(t)) dt + 4 \int_{\pi/2+\psi/4}^{\pi} \ln (\sin(t)) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_{\psi/4}^{\pi/2+\psi/4} \ln(\sin(t)) dt \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt + 4 \int_{\pi/2}^{\pi/2+\psi/4} \ln(\sin(t)) dt - 4 \int_0^{\psi/4} \ln(\sin(t)) dt \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt + 4 \int_0^{\psi/4} \ln\left(\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) dt - 4 \int_0^{\psi/4} \ln(\sin(t)) dt \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt + 4 \int_0^{\psi/4} \ln(\cos(t)) dt - 4 \int_0^{\psi/4} \ln(\sin(t)) dt \\
&= 4 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt + 4 \int_0^{\psi/4} (\ln(\cos(t)) - \ln(\sin(t))) dt
\end{aligned}$$

Cette quantité est maximale si $\int_0^{\psi/4} (\ln(\cos(t)) - \ln(\sin(t))) dt$ est maximale avec $\psi/4 \in [0, \pi/2]$ or la fonction intégrée est positive sur $[0, \pi/4]$ et négative sur $[\pi/4, \pi]$ donc la quantité est maximale pour $\psi/4 = \pi/4$, i.e. pour $\psi = \pi$.

Ainsi la plus grande valeur possible de $\int_0^{2\pi} \ln(\max\{|e^{it} - 1|, |e^{it} - w|\}) dt$ est obtenue pour $w = e^{i\pi}$ i.e. pour $w = -1$ ce qui donne le résultat voulu.

Remarque de l'auteur du corrigé : cette méthode est assez alambiquée et il y a sûrement plus simple mais je n'ai pas trouvé mieux.

$$\begin{aligned}
3.24. \quad I &= \int_0^{2\pi} \ln(\max\{|e^{it} - 1|, |e^{it} + 1|\}) dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \ln(\max\{|e^{it} - 1|, |e^{it} + 1|\}) dt \\
&= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(|e^{it} + 1|) dt.
\end{aligned}$$

Pour $r \in [0, 1[$ on pose $I_r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(|re^{it} + 1|) dt$

On a avec 2.13. $I_r = -\operatorname{Re} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{r^n e^{int}}{n} dt \right)$.

Par convergence normale on peut intervertir série et intégrale :

$$\begin{aligned}
I_r &= -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{int} dt \right) = -\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n^2} 2 \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right) = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n^2} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2} \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}
\end{aligned}$$

Il reste à passer à la limite en 1.

Par convergence normale sur $[0, 1]$ la fonction $r \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}$ est continue en 1.

Par ailleurs un travail similaire à celui fait en 2.15. assure grâce au théorème de convergence dominée que $\lim_{r \rightarrow 1} (I_r) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(|e^{it} + 1|) dt$.

On en déduit donc que $I = 4 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2}$.

3.25. Par critère spécifique des séries alternées, deux sommes partielles consécutives de la série

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{r^{2k+1}}{(2k+1)^2} \text{ encadrent sa somme totale.}$$

Ceci assure que les valeurs obtenues par la calculatrice encadrent I on a donc bien une valeur approchée de I à 10^{-2} près en prenant 1,79.

3.26. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $\omega_k = e^{i\frac{2\pi}{k}}$

On a $Q_k R_k = X^k - 1$ donc $\|Q_k R_k\|_{\mathbb{D}} = 2$.

Par ailleurs $\|Q_k\|_{\mathbb{D}} \geq |Q_k(-1)| = \prod_{\zeta \in U} |\zeta + 1| = \prod_{\zeta \in U} \max\{|\zeta + 1|, |\zeta - 1|\}$.

De même $\|R_k\|_{\mathbb{D}} \geq |R_k(1)| = \prod_{\zeta \in V} |\zeta - 1| = \prod_{\zeta \in V} \max\{|\zeta + 1|, |\zeta - 1|\}$

$$\text{Donc } \|Q_k\|_{\mathbb{D}} \|R_k\|_{\mathbb{D}} \geq \prod_{\zeta \in U \cup V} \max\{|\zeta + 1|, |\zeta - 1|\} = \prod_{j=0}^{n-1} \max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}.$$

Posons $\mathcal{E}$ l'ensemble dont l'énoncé veut déterminer la borne inférieure et $\lambda \in \mathcal{E}$ (qui est nécessairement strictement positif).

$$\text{On a : } \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda^k \geq \frac{\|Q_k\|_{\mathbb{D}} \|R_k\|_{\mathbb{D}}}{\|Q_k R_k\|_{\mathbb{D}}} = \frac{1}{2} \prod_{j=0}^{n-1} \max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}$$

$$\text{donc } \lambda \geq \exp\left(\frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{2} \prod_{j=0}^{n-1} \max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}\right)\right);$$

$$\text{i.e. } \lambda \geq \exp\left(\frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\max\left\{\left|\omega_k^j + 1\right|, \left|\omega_k^j - 1\right|\right\}\right)\right)$$

$$\text{i.e. } \lambda \geq \exp\left(\frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\max\left\{\left|e^{i2\pi\frac{j}{k}} + 1\right|, \left|e^{i2\pi\frac{j}{k}} - 1\right|\right\}\right)\right).$$

Posons $f : t \mapsto \ln\left(\max\left\{\left|e^{it} + 1\right|, \left|e^{it} - 1\right|\right\}\right)$, c'est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ par composition de fonctions continues.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\max\left\{\left|e^{i2\pi\frac{j}{k}} + 1\right|, \left|e^{i2\pi\frac{j}{k}} - 1\right|\right\}\right) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{k} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right).$$

$$\text{Par sommes de Riemann : } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\pi}{k} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right) = \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

$$\text{Donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n-1} \ln\left(\max\left\{\left|e^{i2\pi\frac{j}{k}} + 1\right|, \left|e^{i2\pi\frac{j}{k}} - 1\right|\right\}\right)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus on a donc :

$$\lambda \geq \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt\right) = \exp\left(\frac{I}{2\pi}\right) = C.$$

Par ailleurs on a $C \in \mathcal{E}$ d'après 3.23., ce qui assure que C est le minimum de $\mathcal{E}$ (et donc sa borne inférieure).

Partie IV

- 4.27. On utilise le fait que $h : x \mapsto \frac{b-a}{d-c}(x-c) + a$ réalise une bijection de J vers I telle que $h(c) = a$ et $h(d) = b$.
On pose donc $C(X) = A \left(\frac{b-a}{d-c}(X-c) + a \right)$ et $D(X) = B \left(\frac{b-a}{d-c}(X-c) + a \right)$, on a les résultats voulus.
- 4.28. On pose $\mathcal{E}_I$ l'ensemble dont $C_{n,m}^I$ est par définition la borne supérieure.
La question précédente assure que pour tout couple de segments (I, J) on a $\mathcal{E}_I \subset \mathcal{E}_J$, et par symétrie des rôles de I et J on a aussi $\mathcal{E}_J \subset \mathcal{E}_I$ et finalement $\mathcal{E}_I = \mathcal{E}_J$, ce qui assure que $C_{n,m}^I = C_{n,m}^J$.
- 4.29. On a évidemment $\|Q_0 R_0\|_J \leq \|Q_0 R_0\|_I$.
De plus $\|Q_0 R_0\|_J \geq \frac{1}{C_{n,m}} \|Q_0\|_J \|R_0\|_J = \frac{1}{C_{n,m}} \|Q_0\|_I \|R_0\|_I = \|Q_0 R_0\|_I$.
On a donc $\|Q_0 R_0\|_J = \|Q_0 R_0\|_I$.
- 4.30. On pose c et d dans I tels que $\|Q_0\|_I = |Q_0(c)|$ et $\|R_0\|_I = |R_0(d)|$.
On définit J comme au 4.27.
On a donc $\|Q_0\|_J = \|Q_0\|_I = |Q_0(c)|$ et $\|R_0\|_J = \|R_0\|_I = |R_0(d)|$.
Cela assure aussi par 4.29. que $\|Q_0 R_0\|_J = \|Q_0 R_0\|_I$.
Ainsi que cela est possible par 4.27, on introduit Q_1 et R_1 tels que $\|Q_1\|_I = \|Q_0\|_J$, $\|R_1\|_I = \|R_0\|_J$, $\|Q_1 R_1\|_I = \|Q_0 R_0\|_J$, $Q_1(-1) = Q_0(c)$ et $R_1(1) = R_0(d)$.
Finalement : $\|Q_1\|_I = \|Q_0\|_J = \|Q_0\|_I = |Q_0(c)| = |Q_1(-1)|$.
De même : $\|R_1\|_I = \|R_0\|_J = \|R_0\|_I = |R_0(d)| = |R_1(1)|$.
Enfin : $C_{n,m} \|Q_1 R_1\|_I = C_{n,m} \|Q_0 R_0\|_J = C_{n,m} \|Q_0 R_0\|_I = \|Q_0\|_I \|R_0\|_I = \|Q_1\|_I \|R_1\|_I$.
La paire (Q_1, R_1) convient.
- 4.31. Les polynômes Q_2 et R_2 sont de degrés respectifs n et m .
On a trivialement $\|Q_2\|_I = |Q_2(-1)| = \|Q_1\|_I$ et $\|R_2\|_I = |R_2(1)| = \|R_1\|_I$.
Par ailleurs, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|Q_2(x) R_2(x)| \leq |Q_1(x) R_1(x)| \leq \|Q_1 R_1\|$.
Donc $\|Q_2 R_2\|_I \leq \|Q_1 R_1\|_I = \frac{1}{C_{n,m}} \|Q_1\|_I \|R_1\|_I = \frac{1}{C_{n,m}} \|Q_2\|_I \|R_2\|_I$.
On a $\|Q_2\|_I \|R_2\|_I \geq C_{n,m} \|Q_2 R_2\|_I$, l'inégalité réciproque étant immédiate par définition de $C_{n,m}$ on a donc $\|Q_2\|_I \|R_2\|_I = C_{n,m} \|Q_2 R_2\|_I$.
La paire (Q_2, R_2) est une bonne paire extrémale.
- 4.32. On a $|S_2(-1)| = |Q_2(-1)|$.
Pour $x \in [-1, 1]$, par second côté de inégalité triangulaire :
 $|x+1 - |\omega+1|| \leq |x+1 - \omega - 1| = |x - \omega|$
donc $|S_2(x)| = |x+1 - |\omega+1|| |S(x)| \leq |x - \omega| |S(x)| = |Q_2(x)|$.
Ceci assure $\|S_2\|_I = \|Q_2\|_I = |S_2(-1)|$.
Par ailleurs, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|S_2(x) R_2(x)| \leq |Q_2(x) R_2(x)|$ donc $\|S_2 R_2\|_I \leq \|Q_2 R_2\|_I$.
Comme à 4.31 on a ainsi $\|S_2 R_2\|_I \leq \|Q_2 R_2\|_I = \frac{1}{C_{n,m}} \|Q_2\|_I \|R_2\|_I = \frac{1}{C_{n,m}} \|S_2\|_I \|R_2\|_I$.
Ce qui assure $\|S_2\|_I \|R_2\|_I = C_{n,m} \|S_2 R_2\|_I$.
La paire (S_2, R_2) est une bonne paire extrémale.

- 4.33. On applique la question précédente avec toutes les racines de Q_2 les unes après les autres ce qui consiste à remplacer Q_2 par un polynôme Q_3 dont les racines sont exactement les $-1 + |\omega + 1|$ pour ω racine de Q_2 donc dont les racines sont dans $[-1, +\infty[$.

La question précédente assure que (Q_3, R_2) est toujours une bonne paire extrémale.

- 4.34. Supposons que ω est une racine de Q_3 qui n'est pas dans $[-1, 1]$ (donc $\omega > 1$) et posons $S_3 = \frac{X-1}{X-\omega} Q_3$.

On pose T tel que $Q_3 = (X - \omega)T(X)$, on a $S_3 = (X - 1)T(X)$

Montrons que (S_3, R_2) est toujours une bonne paire extrémale.

On a $|S_3(-1)| = 2|T(-1)| = \frac{2}{\omega+1} |Q_3(-1)| = \frac{2}{\omega+1} \|Q_3\|_I$.

Et pour $x \in [-1, 1]$, $|S_3(x)| = \frac{|x-1|}{|x-\omega|} |Q_3(x)| \leq \frac{2}{\omega-x} \|Q_3\|_I \leq \frac{2}{\omega+1} \|Q_3\|_I = |S_3(-1)|$.

Donc $\|S_3\|_I = |S_3(-1)| = \frac{2}{\omega+1} \|Q_3\|_I$.

Enfin : $\|S_3 R_2\|_I \leq \frac{2}{\omega+1} \|Q_3 R_2\|_I = \frac{1}{C_{n,m}} \frac{2}{\omega+1} \|Q_3\|_I \|R_2\|_I = \frac{1}{C_{n,m}} \|S_3\|_I \|R_2\|_I$.

Ce qui assure $\|S_3\|_I \|R_2\|_I = C_{n,m} \|S_3 R_2\|_I$.

La paire (S_3, R_2) est une bonne paire extrémale.

Puisque l'on peut procéder ainsi pour tout $\omega > 1$ racine de Q_3 on peut construire Q_4 à racines dans I tel que (Q_4, R_2) soit une bonne paire extrémale.

- 4.35. On applique maintenant à R_2 les mêmes méthodes pour obtenir R_3 puis R_4 et on obtient (Q_4, R_4) très bonne paire extrémale.

- 4.36. Posons $\tilde{Q} = \prod_{k=m+1}^{m+n} (X - x_k)$ et $\tilde{R} = \prod_{k=1}^m (X - x_k)$; on a $QR = \tilde{Q}\tilde{R}$.

Puisque les racines de Q font partie des $x_1, \dots, x_n$ où $-1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ on a $\|Q\|_I = |Q(-1)| \leq |\tilde{Q}(-1)|$ et de plus $Q = \tilde{Q} \Leftrightarrow |Q(-1)| = |\tilde{Q}(-1)|$.

De même $\|R\|_I = |R(1)| \leq |\tilde{R}(1)|$ et de plus $R = \tilde{R} \Leftrightarrow |R(1)| = |\tilde{R}(1)|$.

On a notamment $\|\tilde{Q}\|_I \geq \|Q\|_I$ et $\|\tilde{R}\|_I \geq \|R\|_I$.

Ainsi $\|\tilde{Q}\|_I \|\tilde{R}\|_I \geq \|Q\|_I \|R\|_I = C_{n,m} \|QR\|_I = C_{n,m} \|\tilde{Q}\tilde{R}\|_I \geq \|\tilde{Q}\|_I \|\tilde{R}\|_I$.

On a donc $\|\tilde{Q}\|_I \|\tilde{R}\|_I = \|Q\|_I \|R\|_I$ ce qui assure $\|\tilde{Q}\|_I = \|Q\|_I$ et $\|\tilde{R}\|_I = \|R\|_I$.

Les équivalences précédentes assurent bien $\tilde{Q} = Q$ et $\tilde{R} = R$.

- 4.37. C'est immédiat puisque pour tout $k \in \llbracket m+1, m+n \rrbracket$, $x \mapsto |x - x_k|$ est décroissante sur $] -\infty, -1]$.

- 4.38. Supposons par l'absurde que $|P(-1)| \neq \|P\|_{I_\varepsilon}$ on a donc $|P(-1)| < \|P\|_{I_\varepsilon}$.

Par continuité de P cela assure qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [-1 - \varepsilon, -1]$, $|P(x)| < \|P\|_{I_\varepsilon}$.

Fixons un tel ε on a $\|P\|_{I_\varepsilon} = \|P\|_I$.

Or 4.37 assure que $\|Q\|_{I_\varepsilon} > \|Q\|_I$ et par ailleurs $\|R\|_{I_\varepsilon} \geq \|R\|_I > 0$.

On a donc $\frac{\|Q\|_{I_\varepsilon} \|R\|_{I_\varepsilon}}{\|P\|_{I_\varepsilon}} > \frac{\|Q\|_I \|R\|_I}{\|P\|_I} = C_{n,m}$.

Ce qui contredit la définition de $C_{n,m}$ (indépendant du segment) et achève la démonstration par l'absurde : on a $|P(-1)| = \|P\|_{I_\varepsilon}$.

4.39. On pose $\varepsilon > 0$.

On remarque que S est strictement positive et continue sur $[-1, 1] \setminus]x_k - \varepsilon, x_{k+1} + \varepsilon[$ qui est un fermé borné donc S admet un minimum $\alpha > 0$ sur $[-1, 1] \setminus]x_k - \varepsilon, x_{k+1} + \varepsilon[$.

On pose $T = S - \frac{\min\{\alpha, \varepsilon\}}{2}(X + 1)$.

On a $T(-1) = S(-1)$.

Pour tout $x \in I$, $|T(x) - S(x)| = \frac{\min\{\alpha, \varepsilon\}}{2}(1 + x) \leq \varepsilon$ donc $\|S - T\|_I \leq \varepsilon$.

Pour tout $x \in]-1, 1] \setminus]x_k - \varepsilon, x_{k+1} + \varepsilon[$, on a $S(x) \geq \alpha$ et $0 < \frac{\min\{\alpha, \varepsilon\}}{2}(x + 1) \leq \alpha$ donc $0 \leq T(x) < S(x)$ ce qui assure $|T(x)| < |S(x)|$.

Le polynôme T convient ; on remarque de plus que $T(-1) > 0$, $T(x_k) < 0$ et si $\varepsilon < S(1)$, $T(1) > 0$; dans ce cas par théorème des valeurs intermédiaires, T est toujours à racines dans $] - 1, 1[$.

Montrons par l'absurde qu'il existe $y \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $|P(y)| = \|P\|_I$, on suppose que que : $\forall y \in]x_k, x_{k+1}[$, $|P(y)| < \|P\|_I$.

Puisque $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$ on a aussi : $\forall y \in [x_k, x_{k+1}]$, $|P(y)| < \|P\|_I$, par continuité sur le fermé borné $[x_k, x_{k+1}]$ cela assure qu'on peut poser $\beta > 0$ tel que

$\forall y \in [x_k, x_{k+1}]$, $|P(y)| \leq \|P\|_I - \beta$.

Par continuité de P en ses racines x_k et x_{k+1} on peut poser $\gamma > 0$ tel que

$\forall y \in [x_k - \gamma, x_{k+1} + \gamma]$, $|P(y)| \leq \|P\|_I - \beta$.

On posant $U = \prod_{i \in \llbracket m+1, m+n \rrbracket \setminus \{k, k+1\}} (X - x_i)$ on a $Q = SU$ et $P = SUR$.

On pose alors $\varepsilon = \min \left\{ \gamma, \frac{\beta}{\|UR\|_I}, S(1) \right\}$ et on considère T défini tel que ci-dessus.

On a $T(-1) = S(-1)$ donc $(TUR)(-1) = P(-1)$ et donc $\|TUR\|_I \geq \|P\|_I$.

De plus pour tout $x \in]-1, 1[$:

— si $x \notin]x_k - \varepsilon, x_{k+1} + \varepsilon[$, $|T(x)| < |S(x)|$ donc $|(TUR)(x)| \leq |(SUR)(x)| \leq \|P\|_I$;

— si $x \in]x_k - \varepsilon, x_{k+1} + \varepsilon[$, on aussi $x \in [x_k - \gamma, x_{k+1} + \gamma]$ donc $|P(x)| \leq \|P\|_I - \beta$.

Or $\|S - T\|_I \leq \varepsilon$, donc $|T(x)| \leq |S(x)| + \varepsilon$ et ainsi

$|(TUR)(x)| \leq |(SUR)(x)| + \varepsilon |(UR)(x)| \leq |P(x)| + \varepsilon \|UR\|_I \leq \|P\|_I - \beta + \varepsilon \|UR\|_I$

Or par définition, $\varepsilon \|UR\|_I \leq \beta$ donc $|(TUR)(x)| \leq \|P\|_I$.

On a donc démontré que $\|TUR\|_I = \|P\|_I$.

Puisque $(TU)(-1) = Q(-1)$ donc a aussi $\|TU\|_I \geq \|Q\|_I$.

On a également $\|TU\|_I \|R\|_I \leq C_{n,m} \|TUR\|_I = C_{n,m} \|P\|_I = \|Q\|_I \|R\|_I$

donc $\|TU\|_I \leq \|Q\|_I$ et ainsi $\|TU\|_I = \|Q\|_I$.

Finalement $\|TU\|_I \|R\|_I = C_{n,m} \|TUR\|_I$ avec également $\|TU\|_I = |(TU)(-1)|$, TU unitaire de degré n et TU à racines dans $[-1, 1]$, le couple (TU, R) est une très bonne paire extrémale.

Ceci implique $\|TUR\|_I = |(TUR)(1)|$ or $\|TUR\|_I = \|P\|_I = |(SUR)(1)|$, on a donc $|T(1)| = |S(1)|$ ce qui contredit la définition de T est achève la démonstration par l'absurde.

4.40. On pose $S = (X - x_m)(X - x_{m+1})$, $U = \prod_{k=m+2}^{m+n} (X - x_k)$ et $V = \prod_{k=1}^{m-1} (X - x_k)$.

On a $Q = (X - x_{m+1})U$, $R = (X - x_m)V$ et $P = USV$.

On travaille de nouveau par l'absurde pour montrer qu'il existe $y \in]x_m, x_{m+1}[$ tel que $|P(y)| = \|P\|_I$, on suppose que : $\forall y \in]x_m, x_{m+1}[$, $|P(y)| < \|P\|_I$.

Comme ci-dessus on peut poser $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tel que

$\forall y \in [x_m - \gamma, x_{m+1} + \gamma]$, $|P(y)| \leq \|P\|_I - \beta$.

Pour un $\lambda \in]0, 1[$ donné on pose $T_\lambda = \lambda(X - 1)(X + 1) + (1 - \lambda)S$, polynôme unitaire de degré 2 qui est égal à $[1 - \lambda]S$ en 1 et -1 donc strictement positif et qui est strictement négatif en x_m et x_{m+1} donc qui admet deux racines dans $] -1, 1[$, l'une dans $] -1, x_m[$ et l'autre dans $]x_{m+1}, 1[$.

Posons $\varepsilon = \min \left\{ \gamma, \frac{\beta}{\|UV\|_I} \right\}$.

S est strictement positive et continue sur $[-1, 1] \setminus]x_m - \varepsilon, x_{m+1} + \varepsilon[$ qui est un fermé borné donc on peut poser $\alpha \in]0, 1[$ qui minore S sur $[-1, 1] \setminus]x_m - \varepsilon, x_{m+1} + \varepsilon[$.

De plus pour $x \in [-1, 1]$, $-1 \leq (x - 1)(x + 1) \leq 0$ donc pour λ tel que $(1 - \lambda)\alpha \leq \alpha$ (i.e. $\lambda \leq \frac{\alpha}{\alpha + 1}$) on a, pour tout $x \in [-1, 1] \setminus]x_m - \varepsilon, x_{m+1} + \varepsilon[$, $0 \leq T(x) \leq S(x)$.

De plus $\|T_\lambda - S\|_I \leq \lambda(1 + \|S\|_I)$ donc pour $\lambda \leq \frac{\varepsilon}{1 + \|S\|_I}$ on a $\|T_\lambda - S\|_I \leq \varepsilon$.

On pose donc $\lambda = \min \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \frac{\varepsilon}{1 + \|S\|_I} \right\}$ et on note u et v les racines de T_λ telles que $v \in] -1, x_m[$ et $u \in x_{m+1}, 1[$.

On considère alors $UT_\lambda V$ alors :

- pour tout $x \in [-1, 1] \setminus]x_m - \varepsilon, x_{m+1} + \varepsilon[$ on a $|(UT_\lambda V)(x)| \leq |(USV)(x)| = |P(x)| \leq \|P\|_I$
- puisque $\varepsilon \leq \gamma$, pour tout $x \in [x_m - \varepsilon, x_{m+1} + \varepsilon]$, $|(UT_\lambda V)(x)| \leq |(USV)(x)| + \varepsilon |(UV)(x)| = |P(x)| + \varepsilon |(UV)(x)| \leq \|P\|_I - \beta + \varepsilon \|UV\|_I \leq \|P\|_I$.

On a donc justifié $\|UT_\lambda V\|_I \leq \|P\|_I$.

Or $UT_\lambda V = U(X - u)(X - v)V$ avec $v \in] -1, x_m[$ et $u \in x_{m+1}, 1[$.

Ainsi $|U(X - u)(-1)| = |U(-1)|(1 + u) > |U(-1)|(1 + x_{m+1}) = |Q(-1)| = \|Q\|_I$ donc $\|U(X - u)\|_I > \|Q\|_I$.

De même on a $|V(X - v)(1)| = |V(1)|(1 - v) > |V(1)|(1 - x_m) = |R(1)| = \|R\|_I$ donc $\|V(X - v)\|_I > \|R\|_I$.

Ainsi $\|U(X - u)\|_I \|V(X - v)\|_I > \|Q\|_I \|R\|_I = C_{n,m} \|P\|_I \geq C_{n,m} \|UT_\lambda V\|_I$

On a donc : $\|U(X - u)\|_I \|V(X - v)\|_I > C_{n,m} \|U(X - u)(X - v)V\|_I$ ce qui contredit la définition de $C_{n,m}$ et achève la démonstration par l'absurde.

4.41. Les questions précédentes assurent que pour tout $k \in \llbracket 1, m+n-1 \rrbracket$, P est de signe constant et admet un extremum sur $]x_k, x_{k+1}[$ en un point qu'on note y_k où on a donc $P'(y_k) = 0$ et $|P(y_k)| = \|P\|_I$.

Or P' est de degré $(m + n - 1)$ et de coefficient dominant $(m + n)$, les y_k sont donc exactement ses racines et $P' = (m + n) \prod_{k \in \llbracket 1, m+n-1 \rrbracket} (X - y_k)$

Notons $W = P^2 - \|P\|_I^2$ qui a pour racines -1 et 1 d'une part et d'autre part tous les y_k pour $k \in \llbracket 1, m + n - 1 \rrbracket$ où sa dérivée est également nulle, donc ces y_k sont racines d'ordre au moins 2 de W .

Ainsi $(X-1)(X+1) \prod_{k \in \llbracket 1, m+n-1 \rrbracket} (X-y_k)^2$ divise W qui est unitaire de degré $2(m+n)$ ce

qui assure $W = (X-1)(X+1) \prod_{k \in \llbracket 1, m+n-1 \rrbracket} (X-y_k)^2$.

On a $W = (X-1)(X+1) \frac{1}{(m+n)^2} P'^2$ i.e. $\|P\|_I - P^2 = \frac{1}{(m+n)^2} (1-X^2) P'^2$.

Remarque de l'auteur du corrigé : cette méthode ne s'inspire que peu de la précédente, peut-être l'énoncé attend-il une autre démonstration, éventuellement plus simple, mais je n'ai pas trouvé mieux.

4.42. On dérive l'égalité précédente : $-2PP' = \frac{1}{(m+n)^2} (-2XP'^2 + (1-X^2)2P'P'')$

On a donc $\frac{2}{(m+n)^2} P'((m+n)^2 P + (1-X^2)P'' - XP') = 0$;

Puisque $P' \neq 0$, par intégrité de $\mathbb{R}[X]$ on a $(1-X^2)P'' - XP' + (m+n)^2 P = 0$.

4.43. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f'(y) = -\sin(y)P'(\cos(y))$ et

$$f''(y) = -\cos(y)P'(\cos(y)) + (\sin(y))^2 P''(\cos(y)) = -\cos(y)P'(\cos(y)) + (1-(\cos(y))^2)P''(\cos(y)).$$

La relation $(1-X^2)P'' - XP' + (m+n)^2 P = 0$ assure donc que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f''(y) = -(m+n)^2 f(y)$.

f est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficient constant dont l'équation caractéristique est $x^2 = -(m+n)^2$ ce qui assure qu'il existe deux constantes réelles λ et μ telles que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = \lambda \cos((m+n)y) + \mu \sin((m+n)y)$.

Comme $f'(0) = 0$, on a $\mu = 0$ et comme $f(0) = P(1) = \|P\|_I$ (car $P(1) > 0$) on a $\lambda = \|P\|_I$.

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = \|P\|_I \cos((m+n)y)$.

Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a donc :

$$P(x) = P(\cos(\arccos(x))) = f(\arccos(x)) = \|P\|_I \cos((m+n)\arccos(x)).$$

4.44. On a $C_{n,m} = \frac{\|Q\|_I \|R\|_I}{\|P\|_I}$.

La question précédente assure que P admet pour racines tous les $\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right)$ pour $k \in \llbracket 1, m+n \rrbracket$ qui sont des racines distinctes par injectivité de $\cos$ sur $[0, \pi]$. Cela donne $m+n$ racines distinctes pour P qui est de degré $m+n$ et unitaire on a donc

$$P = \prod_{k=1}^{m+n} \left(X - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right) \right).$$

Par décroissance de $\cos$ sur $[0, \pi]$, cela assure alors que $Q = \prod_{k=1}^n \left(X - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right) \right)$

$$\text{et } R = \prod_{k=n+1}^{m+n} \left(X - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right) \right).$$

On a ainsi $\|Q\|_I = |Q(-1)| = \prod_{k=1}^n \left(1 + \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right) \right)$;

de même $\|R\|_I = |R(1)| = \prod_{k=n+1}^{m+n} \left(1 - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)}\right) \right)$.

En utilisant la formule " $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ " et le changement d'indice $j = m + n + 1 - k$ on a :

$$\|R\|_I = \prod_{k=n+1}^{m+n} \left(1 + \cos \left(\frac{(2(m+n-k)+1)\pi}{2(m+n)} \right) \right) = \prod_{j=1}^m \left(1 + \cos \left(\frac{(2j-1)\pi}{2(m+n)} \right) \right).$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = \|P\|_I \cos((m+n)x)$ donc le polynôme $\frac{P}{\|P\|_I}$ est le $(m+n)$ -ième polynôme de Tchebychev de première espèce dont le coefficient dominant est 2^{m+n-1} (ce qui n'est pas au programme de P.C. bien sûr) or le coefficient dominant de P est 1 on a donc $\frac{1}{\|P\|_I} = 2^{m+n-1}$.

On peut donc conclure :

$$C_{n,m} = \frac{\|Q\|_I \|R\|_I}{\|P\|_I} = 2^{m+n-1} \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)} \right) \right) \right) \left(\prod_{k=1}^m \left(1 + \cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2(m+n)} \right) \right) \right).$$