

MATH X-ESPCI PC 2019-20

$\odot$ = produit de Hadamard.

Partie I

1. $aA + bB$ est bien une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ et, puisque a et b sont positifs, pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^T (a \cdot A + b \cdot B) u = a \cdot u^T (A) u + b \cdot u^T (B) u \geq 0,$$

donc $aA + bB \in \text{Sym}^+(p)$.

2. $A = (v_i v_j)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$ est une matrice symétrique et pour tout $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^T A u = u^T v v^T u = (v^T u)^2 \geq 0$$

$(v^T u = \sum_{i=1}^n u_i v_i \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^p$).

3. a $[(u u^T) \odot (v v^T)]_{i,j} = [u_i u_j v_i v_j]_{i,j}$ or

$$[(u \odot v) (u \odot v)^T]_{i,j} = (u \odot v)_i (u \odot v)_j = u_i v_i u_j v_j = u_i u_j v_i v_j,$$

d'où l'égalité.

- b • Puisque $u_k^T A u_k = \lambda_k (u_k^T u_k) \geq 0$ et $u_k^T u_k = \sum_{i=1}^p (u_k)_i^2 = \|u_k\|_{\mathbb{R}^p}^2 > 0$, $\lambda_k \geq 0$.

• La famille orthonormale de p vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de vecteurs propres (rappelons qu'elle existe grâce au théorème spectral).

Soit $B = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T$. Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$B u_i = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T u_i = \lambda_i u_i = A u_i$$

car $u_k^T u_i = 0$ si $k \neq i$ et $u_i^T u_i = 1$. Deux endomorphismes coïncidant sur la base $(u_1, \dots, u_p)$ sont égaux, donc $A = B$.

Remarque la formule est naturelle car $u_k u_k^T$ est la matrice dans la base canonique du projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(u_k)$.

- c Écrivons que $A = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T$ et $B = \sum_{k=1}^p \mu_k u_k u_k^T$ avec $\lambda_k \geq 0$ et $\mu_k \geq 0$.

Il vient

$$\begin{aligned} A \odot B &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \lambda_i \mu_j (u_i u_i^T) \odot (v_j v_j^T) \\ &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2} \lambda_i \mu_j (u_i \odot v_j) (u_i \odot v_j)^T \text{ d'après 3) } \end{aligned}$$

donc, puisque $\lambda_i \mu_j \geq 0$ et par les questions 2) et 1), cette dernière étant étendue par récurrence à un nombre fini quelconque de matrices, $A \odot B \in \text{Sym}^+(p)$.

Partie II

4. a On a par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $(A^{(k)})_{i,j} = (a_{i,j})^k$ d'où le résultat.

- b On a $A^{(0)} \in \text{Sym}^+(p)$ (question 2) avec $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et 3)c) permet alors de montrer par récurrence que pour tout

$k \in \mathbb{N}$, $A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$. Donc, par 1) comme précédemment, $A \in \text{Sym}^+(p) \implies P(A) \in \text{Sym}^+(p)$.

5. a Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, $(P_n[A])_{i,j} = P_n(A_{i,j})$, or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \exp(x)$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (P_n[A])_{i,j} = \exp(A_{i,j}).$$

- b Montrons plus généralement :

Lemme $\text{Sym}^+(p)$ est un fermé de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\text{Sym}^+(p)$ convergeant vers A. Montrons que $A \in \text{Sym}^+(p)$.

- Les matrices A_n sont symétriques donc A est également symétriques.
- Soit $u \in \mathbb{R}^p$, $u^T A u = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u^T A_n u) \geq 0$ par continuité de $M \mapsto u^T M u$, continue car linéaire sur l'espace de dimension finie $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$. – fin de la preuve du lemme –

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n[A] \in \text{Sym}^+(p)$ d'après 4)b) donc par le lemme, $\exp[A] = \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_n[A]) \in \text{Sym}^+(p)$.

- c $\exp[A] \in \text{Sym}^+(p)$ et par 2), $u u^T \in \text{Sym}^+(p)$, donc par 3)c), $\exp[A] \odot (u u^T) \in \text{Sym}^+(p)$.

6. a Il est clair que A est une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.

Pour tout $u = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} u^T A u &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket} u_i A_{i,j} u_j = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i x_i, \sum_{j=1}^n u_j x_j \right\rangle \text{ par bilinéarité de } \langle \cdot, \cdot \rangle \\ &= \left| \sum_{i=1}^n u_i x_i \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $A \in \text{Sym}^+(p)$.

- b Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$,

$$(\exp[A] \odot (u u^T))_{i,j} = \exp(A_{i,j}) u_i u_j = \exp \left(\langle x_i, x_j \rangle - \frac{|x_i|^2}{2} - \frac{|x_j|^2}{2} \right).$$

Or $|x_i - x_j|^2 = |x_i|^2 - 2 \langle x_i, x_j \rangle + |x_j|^2$, donc

$$(\exp[A] \odot (u u^T))_{i,j} = \exp \left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2} \right).$$

- c En posant $\tilde{x}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x_i$ puis $\tilde{A} = (\langle \tilde{x}_i, \tilde{x}_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$, il vient directement

$$(\exp[\tilde{A}] \odot (u u^T))_{i,j} = \exp \left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda} \right) = K_{i,j}.$$

Comme $\tilde{A}$ est de la même forme que A, $\tilde{A} \in \text{Sym}^+(p)$ et donc $K = \exp[\tilde{A}] \odot (u u^T) \in \text{Sym}^+(p)$ d'après 5)c).

Partie III

7. Il existe A, B, a, b tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y)| \leq A \exp \left[-\frac{y^2}{a} \right] \text{ et } |g(y)| \leq B \exp \left[-\frac{y^2}{b} \right].$$

Il vient pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|(fg)(y)| \leq A \cdot B \cdot \exp \left[-\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) y^2 \right],$$

et, comme $1/a + 1/b > 0$, on a par croissances comparées

$$|fg(y)| = o_{|y| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y^2} \right),$$

fg étant par ailleurs continue sur $\mathbb{R}$, par comparaison à l'exemple de Riemann, fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

8. a La fonction f^2 est continue positive sur $\mathbb{R}$, intégrable par 7), donc $(f|f) \geq 0$, et par théorème il y a égalité si et seulement si f^2 , i.e. f , est constamment nulle sur $\mathbb{R}$.
 Bien sûr, $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
 b Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| = \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right).$$

Or,

$$\exp\left(\frac{y^2}{2\lambda}\right) \cdot |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| = \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda} + \alpha y + \beta\right) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0,$$

donc la fonction continue sur $\mathbb{R}$, $y \mapsto \exp\left(\frac{y^2}{2\lambda}\right) \cdot |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)|$ est bornée. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$|\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| \leq A \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda}\right).$$

9. a Démonstration de l'égalité de l'indication :

$$\begin{aligned} \frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} &= \frac{[(a+\lambda)y^2 - 2axy] + ax^2}{a\lambda} = \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{1}{a\lambda} \left(ax^2 - (a+\lambda) \left(\frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) \\ &= \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{\lambda} \left(1 - \frac{a}{a+\lambda}\right) = \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}. \end{aligned}$$

Suivons l'indication de l'énoncé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2\right) dy}_{=c(x)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right).$$

Montrons enfin que $c(x)$ ne dépend pas de x . Plus généralement avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, par changement de variable,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\alpha(y-\beta)^2\right) dy = \int_{u=y-\beta}^{+\infty} \exp\left(-\alpha u^2\right) du,$$

donc $c(x)$ ne dépend pas de x présent dans $\beta = \frac{ax}{a+\lambda}$.

- b Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$C(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_x(\gamma_\lambda)(y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) dy$$

- Tout d'abord la fonction $C(g)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par application du théorème de continuité sur les intégrales à paramètre (ici x).

Les hypothèses naturelles sont vérifiées et on peut utiliser l'hypothèse de domination locale suivante,

avec $|g(y)| \leq A \exp\left[-\frac{y^2}{a}\right]$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left| \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) \right| \leq |g(y)| \leq A \exp\left[-\frac{y^2}{a}\right]$$

et $y \mapsto A \exp\left[-\frac{y^2}{a}\right]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |C(g)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) dy \right| \\ &\leq A \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left[-\frac{y^2}{a}\right] dy \\ &\leq A \cdot c \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \text{ d'après 9)a).} \end{aligned}$$

Donc $C(g) \in \mathcal{E}$ (avec $A \leftarrow A \cdot c$ et $a \leftarrow a + \lambda$).

- c Aucune difficulté par bilinéarité du produit scalaire.

Partie IV

10. $\mathcal{G} = \text{Vect} \{ \tau_x(\gamma_\lambda), (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \}$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ d'après 8)b) et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $\{ \tau_x(\gamma_\lambda), (x, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \}$.

11. a L'indication se montre facilement (comme au 9)a)).

Écrivons

$$\begin{aligned} (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{(y-x')^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\exp\left(-\frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2\right)}_{=\tilde{c}(x, x')} dy \cdot \exp\left(-\frac{(x'-x)^2}{2\lambda}\right). \end{aligned}$$

À la question 9)a), nous avons que $\tilde{c}(x, x')$ ne dépend pas de x et de x' (par changement de variable), notons cette constante c_λ , d'où le résultat, $(\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x')$.

On a $c_\lambda > 0$ par le même argument qu'en 8)a).

b D'où pour $x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') &= (\tau_{x'}(\gamma_\lambda) \mid \tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x' - x) \quad (\gamma_{2\lambda} \text{ est paire}) \\ &= c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x'), \end{aligned}$$

donc on a bien $C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$.

Puis $\mathcal{H} = \text{Vect} \{ c_\lambda \cdot \tau_x(\gamma_{2\lambda}), x \in \mathbb{R} \} = \text{Vect} \{ \tau_x(\gamma_{2\lambda}), x \in \mathbb{R} \}$ car $c_\lambda \neq 0$ (c'est l'intégrale d'une exponentielle), d'où le résultat.

12. a • $n = 1$. Puisque $\tau_x(\gamma_{2\lambda})$ est une fonction non nulle, $\{\tau_x(\gamma_{2\lambda})\}$ est libre.

• Soit $n \geq 2$. Supposons la liberté établie pour toute famille de réels distincts $(x_i)_{1 \leq i \leq n-1}$.

Soit une famille de réels $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ (ordonnons $x_0 < x_1 < \dots < x_n$) et supposons qu'il existe $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0.$$

Lemme Pour $i \in [1, n-1]$, $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \tau_{x_n}(\gamma_{2\lambda})(x)$.

En effet $(x - x_n)^2 - (x - x_i)^2 = 2x(x_i - x_n) + x_n^2 - x_i^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

Si $\alpha_n \neq 0$, alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_n \tau_{x_n}(\gamma_{2\lambda})(x)$, absurde car $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est la fonction nulle. Ainsi

$\alpha_n = 0$ et on peut conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

b On cherche à montrer que C est bijective (de réciproque notée D).

Déjà C est clairement surjective puisque $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$.

Ensuite, C est injective car si $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \in \ker C$ alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot c_\lambda \cdot \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) = 0,$$

et, avec $c_\lambda \neq 0$ et la question précédente, tous les α_i sont nuls donc $g = 0$.

c Pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} h(x) &= (C \circ D)(h)(x) \\ &= (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid D(h)) \text{ par définition de } C. \end{aligned}$$

13. a Rappelons que $c_\lambda > 0$. On vérifie sans peine les définitions du produit scalaire (D est injective).

b D'après 12)c), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h(x) &= (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid D(h)) \\ &= ((D \circ C)(\tau_x(\gamma_\lambda)) \mid D(h)) \text{ d'après 12)b)} \\ &= \frac{1}{c_\lambda} (C(\tau_x(\gamma_\lambda)) \mid h)_{\mathcal{H}} \text{ par définition} \\ &= (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid h)_{\mathcal{H}} \text{ d'après 11)b)}. \end{aligned}$$

c Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|h(x)| \leq \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \cdot \|h\|_{\mathcal{H}}.$$

$$\text{Or } \tau_x(\gamma_{2\lambda}) = \frac{1}{c_\lambda} C(\tau_x(\gamma_\lambda)) \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2 &= c_\lambda \cdot \frac{1}{c_\lambda^2} (\tau_x(\gamma_\lambda) | \tau_x(\gamma_\lambda)) \\ &= \gamma_{2\lambda}(0) = 1 \text{ d'après 11)a) et b) et 12)b).} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \|h\|_\infty \leq \|h\|_{\mathcal{H}}.$$

Partie V

L'énoncé de $\mathcal{S}$ est trop elliptique (mettre pour tout i dans les accolades).

C'est le principe des moindres carrés sur l'espace affine $\mathcal{S}$ (projection de 0) mais qui n'est pas de dimension finie.

14. Supposons que $\mathcal{S}_*$ admette deux éléments h et $h+a$.

Alors la fonction polynomiale de degré ≤ 2

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \|h+ta\|_{\mathcal{H}}^2 = \|a\|_{\mathcal{H}}^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (h | a)_{\mathcal{H}} + \|h\|_{\mathcal{H}}^2 \end{cases}$$

admet un minimum en deux points distincts (0 et 1), absurde si $a \neq 0$ (on connaît les variations des polynômes de degré 2).

15. C'est quasiment la même preuve... Remarquons que $\mathcal{H} = \tilde{h} + \mathcal{H}_0$.

On considère la fonction polynomiale de degré ≤ 2

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \|\tilde{h} + th_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 \cdot t^2 + 2t \cdot (\tilde{h} | h_0)_{\mathcal{H}} + \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 \end{cases}$$

qui admet un minimum en 0, donc $\varphi'(0) = 0 = 2(\tilde{h} | h_0)_{\mathcal{H}}$.

16. a $\mathcal{S}_* \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ est immédiat avec la question précédente.

Réciproquement, si $\tilde{h} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ alors pour tout $h \in \mathcal{H}$, $h - \tilde{h} \in \mathcal{H}_0$ donc, par Pythagore,

$$\|h\|_{\mathcal{H}}^2 = \|h - \tilde{h} + \tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|h - \tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2$$

$$\text{D'où } \|h\|_{\mathcal{H}} \geq \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}.$$

b Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Soit $h_0 \in \mathcal{H}_0$.

$$\begin{aligned} (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) | h_0)_{\mathcal{H}} &= h_0(x_i) \text{ d'après 13)b)} \\ &= 0 \text{ par définition,} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

17. a Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$h_\alpha(x_i) = \sum_{j=1}^p \alpha_j \underbrace{\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i)}_{=K_{i,j}} = \sum_{j=1}^p \alpha_j K_{i,j} = (K\alpha)_i.$$

Donc

$$(\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, h_\alpha(x_i) = a_i) \Leftrightarrow K\alpha = a.$$

b Soit α tel que $K\alpha = 0$.

Par 17)a), on a $h_\alpha \in \mathcal{H}_0$ (c'est une interpolante pour $(0, \dots, 0)$). Mais, par 16)b), h_α est toujours dans $\mathcal{H}_0^\perp$. Donc $h_\alpha = 0$. Ce qui, avec 12)a), donne $\alpha = (0)$.

18. On pose $\alpha_* = K^{-1}a$. Alors $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$ donc h_{α_*} est solution, et on sait que c'est la seule possible. De plus,

$$\begin{aligned}
 J_* &= \frac{1}{2} \|h_{\alpha_*}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} (h_{\alpha_*} \mid h_{\alpha_*})_{\mathcal{H}} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket^2} \alpha_{*,i} \alpha_{*,j} (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} \\
 &= \frac{c_\lambda}{2} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket^2} \alpha_{*,i} \alpha_{*,j} (D(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})) \mid D(\tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))) \\
 &= \frac{1}{c_\lambda} \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket^2} \alpha_{*,i} \alpha_{*,j} (\tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x_j}(\gamma_\lambda)) \text{ d'après 11)b)} \\
 &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,p \rrbracket^2} \alpha_{*,i} \alpha_{*,j} \gamma_{2\lambda}(x_i - x_j) \text{ d'après 11)a)} \\
 &= \alpha_*^T K \alpha_* = \boxed{a^T K^{-1} a}
 \end{aligned}$$