

Ceci est une proposition de corrigé établi pour l'UPS. HD

Première partie

1a. On note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j égal à 1. Les matrices $(E_{i,i})_{i=1..n}$ et $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On montre que cette famille est libre. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Toute matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et semblable à une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le spectre d'une telle matrice A est l'ensemble des éléments diagonaux de D . $s^\downarrow(A)$ est bien défini.

1b. Si $n = 1$, l'application $s^\downarrow$ est l'identité et elle est linéaire. Pour $n \geq 2$ le résultat est faux. Prenons D matrice diagonale, d'éléments diagonaux $1, 0, \dots, 0$. On a $s^\downarrow(D) = (1, 0, \dots, 0)$. Le spectre de $-D$ est $\{-1, 0, \dots, 0\}$ et $s^\downarrow(-D) = (0, \dots, 0, -1) \neq -s^\downarrow(D)$. L'application $s^\downarrow$ n'est pas linéaire.

1c. Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et si $s^\downarrow(M) = (m_1, \dots, m_n)$, les valeurs propres de $-M$ sont $\{-m_1, \dots, -m_n\}$ et, en les réordonnant, $s^\downarrow(-M) = (-m_n, \dots, -m_1)$.

1d. Soit $M = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

On a : $\chi_A(t) = (t - \lambda)(t - \mu) - h^2 = t^2 - t(\lambda + \mu) + \lambda\mu - h^2$.

$\Delta = (\lambda + \mu)^2 - 4\lambda\mu + 4h^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4h^2 \geq 0$. Deux racines

$$t_2 = \frac{\lambda + \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2} \leq t_1 = \frac{\lambda + \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4h^2}}{2} \quad s^\downarrow(M) = (t_1, t_2).$$

2a. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $m = s^\downarrow(M)$ son spectre ordonné. On sait qu'il existe une base **orthonormée** de vecteurs propres de M , $(v_1, \dots, v_n)$ associés aux valeurs propres $m_1, \dots, m_n$. Pour tout vecteur v_k , $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i^t v_i \right) v_k = \sum_{i=1}^n m_i v_i^t v_i v_k = \sum_{i=1}^n m_i v_i \langle v_i, v_k \rangle.$$

Comme la base des v_i est orthonormée :

$$\left(\sum_{i=1}^n m_i v_i^t v_i \right) v_k = m_k v_k \langle v_k, v_k \rangle = m_k v_k = M v_k.$$

Les deux applications linéaires $x \mapsto Mx$ et $x \mapsto \left(\sum_{i=1}^n m_i v_i^t v_i \right) x$ coïncident sur une base.

Elles sont égales et ont même matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par suite :

$$M = \sum_{i=1}^n m_i v_i^t v_i.$$

2b. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. En le décomposant sur la base $(v_1, \dots, v_n)$, $x = \sum_{i=1}^n y_i v_i$.

$$Mx = \sum_{i=1}^n y_i m_i v_i \text{ et, comme on est dans une base orthonormée, } \langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2.$$

Comme $m_1 \geq \dots \geq m_n$ et que $y_i^2 \geq 0$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, Mx \rangle \leq \sum_{i=1}^n m_1 y_i^2 = m_1 \|x\|^2$$

En particulier $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1, \langle x, Mx \rangle \leq m_1$. En prenant $x = v_1$ qui est de norme 1, on a alors $\langle v_1, Mv_1 \rangle = m_1$. Par suite :

$$\sup_{\|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_1$$

2c. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$. $\mathcal{V}_j = Vect(v_1, \dots, v_j)$. Comme dans la question précédente,

pour $x = \sum_{i=1}^j y_i v_i$ vecteur quelconque de de norme 1 de $\mathcal{V}_j$:

$$\langle x, Mx \rangle = \sum_{i=1}^j m_i y_i^2 \geq m_j \left(\sum_{i=1}^j y_i^2 \right) = m_j \|x\|^2 = m_j$$

En prenant $x = v_j$, vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}_j$: $\langle x, Mx \rangle = m_j$.

On a donc : $\inf_{x \in \mathcal{V}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$.

De même avec $\mathcal{W}_j = Vect(v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$, en majorant les quantités étudiées :

$$\sup_{x \in \mathcal{W}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$$

3a. Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n$. On sait que : $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V})$.

Si on avait $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ on aurait $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n$, impossible pour un sev de $\mathbb{R}^n$. Donc $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

3b. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $m = s^\downarrow(M)$. Soit j un entier, $1 \leq j \leq n$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension j . D'après la question précédente $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}_j$ contient au moins un vecteur non nul. Comme c'est un sev, il contient au moins un vecteur x_0 de norme 1.

Par définition, comme $x_0 \in \mathcal{V}$ et est de norme 1 : $\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \leq \langle x_0, Mx_0 \rangle$.

Mais $x_0 \in \mathcal{W}_j$ et est de norme 1, donc : $\langle x_0, Mx_0 \rangle \leq \sup_{x \in \mathcal{W}_j, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j$.

En réunissant les deux inégalités on a bien :

$$\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

3c. Pour $\mathcal{V}$ sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension j , notons $\varphi(\mathcal{V}) = \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle$.

On vient de voir que pour $\mathcal{V}$ quelconque, $\varphi(\mathcal{V}) \leq m_j$. On a donc par définition de la borne supérieure d'un ensemble non vide et majoré de réels : $\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V}=j} \varphi(\mathcal{V}) \leq m_j$.

On a donc :

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V}=j} \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \leq m_j.$$

Mais pour $\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$, la valeur m_j est atteinte et c'est la borne supérieure.

$$\sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = j} \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j.$$

Remarquons que le même raisonnement peut être fait avec $\mathcal{W}$ sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - j + 1$ et on a alors :

$$\inf_{\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{W} = n-j+1} \sup_{x \in \mathcal{W}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j.$$

borne atteinte pour $\mathcal{W} = \mathcal{W}_j$.

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant la matrice $-M$.

4. Soient m et l deux n -uplets de réels. On note

$$l \preccurlyeq m \quad \text{si et seulement si, pour tout entier } j, 1 \leq j \leq n, l_j \leq m_j.$$

4a. Soient $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0, \dots, 0) \preccurlyeq s^\downarrow(M - L)$. Les valeurs propres de $M - L$ sont donc toutes positives. Notons $s^\downarrow(M - L) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. On a vu dans les questions précédentes que, pour tout vecteur x de norme 1, $0 \leq \alpha_n \leq \langle x, (M - L)x \rangle \leq \alpha_1$.

Soit $\mathcal{V}$ un sev quelconque de dimension j de $\mathbb{R}^n$:

Soit x un vecteur de norme 1 de $\mathcal{V}$: $\langle x, (M - L)x \rangle + \langle x, Lx \rangle = \langle x, Mx \rangle$.

$$\forall x \in \mathcal{V}, \|x\| = 1 : 0 + \inf_{y \in \mathcal{V}, \|y\|=1} \langle y, Ly \rangle \leq \langle x, (M - L)x \rangle + \langle x, Lx \rangle = \langle x, Mx \rangle.$$

Par définition de la borne supérieure (plus grand des minorants) on a :

$$\inf_{y \in \mathcal{V}, \|y\|=1} \langle y, Ly \rangle \leq \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle \leq \sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = j} \inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x, Mx \rangle = m_j.$$

Et finalement :

$$l_j = \sup_{\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n, \dim \mathcal{V} = j} \inf_{y \in \mathcal{V}, \|y\|=1} \langle y, Ly \rangle \leq m_j$$

On a donc : $s^\downarrow(L) \preccurlyeq s^\downarrow(M)$.

4b. Soit α une valeur propre de $\|M\|I_n - M$ et x un vecteur propre associé de norme 1.

$$(\|M\|I_n - M)x = \alpha x = \|M\|x - Mx.$$

$$\text{D'où } Mx = (\|M\| - \alpha)x \text{ et } \|Mx\| = \|\|M\| - \alpha\| \times \|x\| = \|\|M\| - \alpha\|.$$

Or, par définition de $\|M\|$, $\|Mx\| \leq \|M\|$. On a donc : $\|\|M\| - \alpha\| \leq \|M\|$.

De plus $\|M\| - \alpha \leq \|\|M\| - \alpha\| \leq \|M\|$ donc $\alpha \geq 0$.

Toutes les valeurs propres sont positives et on a donc $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(0, \dots, 0) \preccurlyeq s^\downarrow(\|M\|I_n - M)$.

4c. Soit $L, M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^\downarrow(M)$ et $l = s^\downarrow(L)$.

D'après la question précédente $(0, \dots, 0) \preccurlyeq s^\downarrow(\|L - M\|I_n - (L - M))$ et d'après la question **4a** $s^\downarrow(L - M) \preccurlyeq s^\downarrow(\|L - M\|I_n)$.

Si on note $s^\downarrow(L - M) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, comme $\|L - M\|I_n$ possède une seule valeur propre égale à $\|L - M\|$, on a $\alpha_n \leq \dots \leq \alpha_1 \leq \|L - M\|$.

Soit $j \in [[1, n]]$. On a $\dim(\mathcal{V}_j(L)) + \dim(\mathcal{W}_j(M)) = n + 1 > n$. Il existe donc au moins un vecteur non nul (que l'on peut choisir de norme 1) dans l'intersection de ces deux espaces.

Soit x un tel vecteur. On sait que : $\langle x, Lx \rangle \geq l_j$ $\langle x, Mx \rangle \leq m_j$.

$$l_j - m_j \leq \langle x, Lx \rangle - \langle x, Mx \rangle = \langle x, (L - M)x \rangle \leq \alpha_1 \leq \|L - M\|.$$

En échangeant le rôle de L et M on a aussi $l_j - m_j \leq \|M - L\| = \|L - M\|$. Finalement : $\forall j \in [[1, n]]$, $|l_j - m_j| \leq \|L - M\|$. Il en résulte que

$$\max_{1 \leq j \leq n} |l_j - m_j| \leq \|L - M\|$$

4d. Prenons dans $\mathbb{R}^n$ la norme 1 associée à la base canonique. On vient de montrer que

$$\|l - m\|_1 \leq \|L - M\|$$

avec $l = s^\downarrow(L)$ et $m = s^\downarrow(M)$, L et M quelconques dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

La fonction $s^\downarrow : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne donc continue.

5. On note $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n \times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples.

5a. Soit $M \in \mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. Soit $m = s^\downarrow(M)$. On a donc $m_1 > m_2 > \dots > m_n$.

Soit $r > 0$ et L élément de la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r . Avec les notations précédentes : $\forall j \in [[1, n]]$, $|l_j - m_j| \leq \|L - M\| < r$. On a donc :

pour tout $j > 1$, $m_j - r < l_j < m_j + r$. Pour que les valeurs propres de L soient distinctes il suffit que les intervalles $]m_j - r, m_j + r[$ soient distincts. Comme $m_1 > m_2 > \dots > m_n$ il suffit qu'on ait pour tout j , $m_j + r < m_{j-1} - r$.

Soit donc $\varepsilon = \min\{m_1 - m_2, m_2 - m_3, \dots, m_{n-1} - m_n\}$. On sait que $\varepsilon > 0$. Prenons $r = \varepsilon/3$.

On a pour tout j , $2r = 2\varepsilon/3 < \varepsilon \leq m_j - m_{j-1}$.

La boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r est incluse dans $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$. Par définition, $\mathcal{S}_n^\dagger(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

5b. La première composante $s_1^\downarrow$ de $s^\downarrow$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2^\dagger(\mathbb{R})$ car sur cet ensemble le discriminant Δ reste strictement positif et on a alors une composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur des ouverts correspondants.

On n'a plus ce résultat sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Prenons en effet la restriction à l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & h \\ h & 0 \end{pmatrix}$. On a dans ce cas la fonction $h \mapsto |h|$ qui n'est pas dérivable en 0.

Deuxième partie

Dans toute cette partie, on considère deux matrices symétriques réelles $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et leur somme $C = A + B$. On note $a = s^\downarrow(A)$, $b = s^\downarrow(B)$ et $c = s^\downarrow(C)$.

6a. Pour une matrice diagonalisable, sa trace est égale à la somme de ses valeurs propres. Donc directement :

$$tr(C) = \sum_{i=1}^n c_i = tr(A + B) = tr(A) + tr(B) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

6b. Soit x vecteur propre de C , de norme 1, associé à c_1 . On peut écrire :

$$\langle x, Cx \rangle = c_1 = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq a_1 + b_1$$

6c. De même en prenant un vecteur propre de C associé à sa plus petite valeur propre on montre $a_n + b_n \leq c_n$.

7a. Soient $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} > 2n$$

On a en utilisant la relation de Grassmann : $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n$. $\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) > 2n - \dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) > n$ car $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ est un sev de $\mathbb{R}^n$ donc de dimension

n au maximum. Le résultat de la question **3a** permet d'affirmer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

7b. Considérons une résolution spectrale de chacune des matrices A, B et C et notons $\mathcal{V}_j(A)$, $\mathcal{V}_j(B)$ et $\mathcal{V}_j(C)$ les espaces associés. (même notation avec les espaces $\mathcal{W}_j$). Soit j et k deux entiers positifs vérifiant $j + k \leq n + 1$, on a :

$$\dim(\mathcal{W}_j(A)) = n - j + 1, \dim \mathcal{W}_k(B) = n - k + 1, \dim \mathcal{V}_{j+k-1} = j + k - 1$$

La somme des dimensions des trois sev est $2n + 1$. D'après la question précédente il existe au moins un vecteur non nul dans l'intersection. Donc au moins un vecteur de norme 1. Soit x un tel vecteur : $x \in \mathcal{W}_j(A) \Rightarrow \langle x, Ax \rangle \leq a_j$; $x \in \mathcal{W}_k(B) \Rightarrow \langle x, Bx \rangle \leq a_k$; et $x \in \mathcal{V}_{j+k-1}(C) \Rightarrow \langle x, Cx \rangle \geq c_{j+k-1}$; on obtient :

$$c_{j+k-1} \leq \langle x, (A + B)x \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Bx \rangle \leq a_j + b_k$$

On peut raisonner de même avec les matrices $-A$ et $-B$. Notons $a' = s^\perp(-A)$, $b' = s^\perp(-B)$ et $c' = s^\perp(-A - B)$ on a , avec les mêmes hypothèses :

$$c'_{j+k-1} \leq a'_j + b'_k \quad \text{avec} \quad a'_j = -a_{n-j}, b'_k = -b_{n-k}, c'_r = -c_{n-r}$$

Donc $-c_{n-(j+k-1)} \leq -a_{n-j} - b_{n-k}$ et $c_{n-(j+k-1)} \geq a_{n-j} + b_{n-k}$.

En prenant $j' = n - j$ élément quelconque de $[[1, n]]$ et $k \in [[1, n]]$ tel que

$j + k = n - j' + k \leq n + 1$ (choix toujours possible) on obtient : $c_{j'-k+1} \geq a_{j'} + b_k \geq a_{j'} + b_n$.

Prenons $k = 1$; $j + k = n - j + 1 \leq n + 1$ et donc

$c_{j'} \geq a_{j'} + b_n$ avec j' entier quelconque de $[[1, n]]$.

8. On note a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$ les éléments diagonaux de A .

8a. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Cette base est orthonormée.

On a : $Ae_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i$ et $a_{1,1} = \langle Ae_1, e_1 \rangle = \langle e_1, Ae_1 \rangle$.

Or, pour tout vecteur x de norme 1, $\langle x, Ax \rangle \leq a_1$. En particulier : $a_{11} \leq a_1$.

8b. Soient j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j < k$ et $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k$ des réels. On définit $\mathcal{D}_{j,k} = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k \mid t_1 + \dots + t_k = j\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k s_i t_i.$$

Notons $G = \sum_{i=1}^j s_i - f(t_1, \dots, t_k)$ et $D = \sum_{i=1}^j (s_i - s_j)(1 - t_i)$.

$$G = \sum_{i=1}^j s_i - \sum_{i=1}^j t_i s_i - \sum_{i=j+1}^k s_i t_i = \sum_{i=1}^j s_i (1 - t_i) - \sum_{i=j+1}^k s_i t_i.$$

Mais pour $i \geq j + 1$, $s_i \leq s_j$, $t_i \geq 0$ donc $s_i t_i \leq s_j t_i$. En passant aux inverses :

$$\begin{aligned} G &\geq \sum_{i=1}^j s_i (1 - t_i) - \sum_{i=j+1}^k s_j t_i = \sum_{i=1}^j s_i (1 - t_i) - s_j \sum_{i=j+1}^k t_i = \sum_{i=1}^j s_i (1 - t_i) - s_j (j - (t_1 + \dots + t_i)) \\ G &\geq \sum_{i=1}^j s_i (1 - t_i) + \sum_{i=1}^j s_j t_i - s_j \sum_{i=1}^j 1 = \sum_{i=1}^j s_i (1 - t_i) + \sum_{i=1}^j s_j (t_i - 1) = \sum_{i=1}^j (s_i - s_j)(1 - t_i) = D. \end{aligned}$$

On a bien démontré que, pour tout $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{D}_{j,k}$,

$$\sum_{i=1}^j s_i - f(t_1, \dots, t_k) \geq \sum_{i=1}^j (s_i - s_j)(1 - t_i).$$

La quantité minorante est positive. Donc $f(t_1, \dots, t_k) \leq \sum_{i=1}^j s_i$.

En prenant $t_1 = \dots = t_j = 1$ et $t_{j+1} = \dots = t_k = 0$ on a $f(t_1, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^j s_i$. Par suite :

$$\sup_{\mathcal{D}_{j,k}} f = \sum_{i=1}^j s_i.$$

8c. Pour tout k on peut décomposer e_i dans la base orthonormée de vecteurs propres at-

tachés à A , $(v_1, \dots, v_n)$. $e_i = \sum_{x=1}^n \langle e_i, v_x \rangle v_x$; $Ae_i = \sum_{x=1}^n \langle e_i, v_x \rangle a_x v_x$.

$$a_{ii} = \langle e_i, Ae_i \rangle = \sum_{x=1}^n \langle e_i, v_x \rangle^2 a_x. \text{ Soit } j \text{ dans } [[1, n]], \sum_{i=1}^j a_{ii} = \sum_{i=1}^j \left(\sum_{x=1}^n \langle e_i, v_x \rangle^2 a_x \right).$$

$$\sum_{i=1}^j a_{ii} = \sum_{x=1}^n \left(\sum_{i=1}^j \langle e_i, v_x \rangle^2 \right) a_x$$

Notons, pour chaque x , $t_x = \sum_{i=1}^j \langle e_i, v_x \rangle^2 \geq 0$. On a $\sum_{i=1}^j \langle e_i, v_x \rangle^2 = \|v_x\|^2 = 1$ donc $t_x \leq 1$.

(En effet, comme la base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée, pour tout x , $v_x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v_x \rangle e_i$).

$$\text{De plus } \sum_{x=1}^n t_x = \sum_{x=1}^n \sum_{i=1}^j \langle e_i, v_x \rangle^2 = \sum_{i=1}^j \left(\sum_{x=1}^n \langle e_i, v_x \rangle^2 \right) = \sum_{i=1}^j \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^j 1 = j.$$

On est donc exactement dans les hypothèses de la question **8b** et, pour tout entier

$$1 \leq j \leq n, \sum_{i=1}^j a_{ii} = \sum_{x=1}^n t_x a_x \leq \sum_{x=1}^j a_x.$$

8d. La démonstration précédente se transpose à n'importe quelle famille orthonormée

$(x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle \leq \sum_{i=1}^j a_i$.

Dans le cas où la base est $(v_1, \dots, v_n)$, la somme est égale à $\sum_{i=1}^j a_i$. On a donc bien pour

$$\text{tout entier } 1 \leq j \leq n : \sum_{i=1}^j a_i = \sup_{(x_1, \dots, x_j) \in \mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^j \langle x_i, Ax_i \rangle,$$

(où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans $\mathbb{R}^n$.)

8c. Soit alors $(w_1, \dots, w_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de C et, pour $j \in [[1, n]]$, $\mathcal{R}_j = (w_1, \dots, w_j)$.

On a d'après ce qui précède :

$$\sum_{i=1}^j c_i = \sum_{i=1}^j \langle w_i, Cw_i \rangle = \sum_{i=1}^j \langle w_i, Aw_i \rangle + \sum_{i=1}^j \langle w_i, Bw_i \rangle \leq \sum_{i=1}^j a_i + \sum_{i=1}^j b_i.$$

Troisième partie

Dans toute cette partie, on étudie le cas $n = 2$. Pour deux réels u et v tels que $u \geq v$, on note :

$$S(u, v) = \left\{ M \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \mid s^\downarrow(M) = \{u, v\} \right\}.$$

On fixe $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$, quatre réels vérifiant la relation

$$a_1 - a_2 \geq b_1 - b_2.$$

$$\Sigma = \{s^\downarrow(A + B) \mid A \in S(a_1, a_2), B \in S(b_1, b_2)\}$$

9. Si $C = A + B$, $\text{tr}(C) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ donc , avec les notations précédentes :

$$c_1 + c_2 = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$$

Σ est inclus dans la droite du plan d'équation $x + y = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$.

Mais on sait de plus d'après la question **7b.** que $c_{2+1-1} \leq a_2 + b_1$ et $c_2 \geq a_2 + b_2$. Les points de Σ sont d'ordonnée comprise entre $a_2 + b_2$ et $a_2 + b_1$. Notons H et K ces deux points extrêmes . Leurs abscisses sont $a_1 + b_1$ et $a_1 + b_2$. Les coordonnées de $\overrightarrow{HK}$ sont : $(b_2 - b_1, b_1 - b_2)$ et $\|\overrightarrow{HK}\|^2 = 2(b_1 - b_2)^2$. Σ est inclus dans le segment $[HK]$ qui est de longueur $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$.

10a. Soit A une matrice fixée de $S(a_1, a_2)$, B une matrice quelconque de $S(b_1, b_2)$. A est diagonalisable. Il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} {}^tP$. Notons D la matrice diagonale d'éléments diagonaux a_1, a_2 . $A + B$ est semblable à $B' = D + {}^tPBP$. On a $s^\downarrow(A+B) = s^\downarrow(D+B')$. L'application $B \mapsto {}^tPBP$ est une bijection de l'ensemble $S(b_1, b_2)$. On a donc bien :

$$\Sigma = \left\{ s^\downarrow(A + B) \mid A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B \in S(b_1, b_2) \right\}.$$

10b. Toute matrice symétrique réelle est orthodiagonalisable. Pour $B \in S(b_1, b_2)$, on peut construire une base orthonormée directe de vecteurs propres. Il existe $\theta \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

L'application qui à θ associe la matrice ci-dessus est clairement continue et, par construction, son image est $S(b_1, b_2)$.

10c. Notons $B(\theta)$ la matrice précédente et $\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. L'application $\theta \mapsto s^\downarrow(\Delta + B(\theta))$ est continue par composée de fonctions continues (cf. question **1d.**). L' image de $[-\pi, \pi]$ est d'après la question précédente l'ensemble Σ . Les deux fonctions coordonnées sont également continues donc l'image de $[-\pi, \pi]$ par chacune de ces deux fonctions est un **segment** de $\mathbb{R}$. Il en résulte que Σ est un segment de $\mathbb{R}^2$. Ce segment I est inclus dans HK . Il reste à montrer que c'est HK .

$$\text{Prenons } \theta = 0; \Delta + B(0) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}. s^\downarrow(\Delta + B(0)) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = H.$$

$$\text{Avec } \theta = \pi/2: \Delta + B(\pi/2) = \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_1 \end{pmatrix}. s^\downarrow(\Delta + B(\pi/2)) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1) = K.$$

Le segment I contient les deux points H et K , il contient donc le segment $[HK]$.
 Par double inclusion $\Sigma = L = [HK]$.

* *

*

N.B. : Corrigé établi pour l'UPS par Hugues Demongeot. Merci de signaler toute erreur, omission ou imprécision. Avril 2015.