Mines M2 2018 - Corrigé

I Noyau de Dirichlet

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$D_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt),$$

donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt &= \int_{-\pi}^{\pi} 1dt + 2\sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)dt \\ &= 2\pi + 2\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} = 2\pi.\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}D_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{1-(e^{it})^{2n+1}}{1-e^{it}} \quad \text{(somme géométrique de raison } e^{it} \neq 1) \\ &= \frac{e^{-int} - e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{it/2}}{e^{it/2}}\frac{e^{-i(n+1/2)t} - e^{i(n+1/2)t}}{e^{-it/2} - e^{it/2}} \\ &= \frac{\dfrac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{2i}}{\dfrac{e^{it/2} - e^{-it/2}}{2i}} = \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}.\end{aligned}$$

3. Soit α un réel strictement positif. Posons $u(t) = h(t)$, $u'(t) = h'(t)$, $v'(t) = \sin(\alpha t)$, $v(t) = -\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha t)$.
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi, \pi]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}I_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(\alpha t)dt &= \left[-\frac{1}{\alpha}h(t)\cos(\alpha t)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h'(t)\cos(\alpha t)dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(h(\pi) - h(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} h'(t)\cos(\alpha t)dt\right).\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$|h'(t)\cos(\alpha t)| \leq |h'(t)| \leq \|h'\|_\infty^{[-\pi,\pi]}$$

qui existe car h' est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$.
D'où, par positivité de l'intégrale ($\pi \geq -\pi$),

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} h'(t)\cos(\alpha t)dt\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|h'\|_\infty^{[-\pi,\pi]}dt = 2\pi\|h'\|_\infty^{[-\pi,\pi]}.$$

Enfin,

$$|I_\alpha| \leq \frac{1}{\alpha}\left(|h(\pi) - h(-\pi)| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} h'(t)\cos(\alpha t)dt\right|\right) \leq \frac{1}{\alpha}(|h(\pi) - h(-\pi)| + 2\pi\|h'\|_\infty^{[-\pi,\pi]}),$$

où $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \dfrac{1}{\alpha}\underbrace{(|h(\pi) - h(-\pi)| + 2\pi\|h'\|_\infty^{[-\pi,\pi]})}_{\text{constante par rapport à } \alpha} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} &= \sum_{k=-n}^{n}\left(e^{ikt}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx\right) \quad \text{(par définition de } c_k(g)) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n} g(x)e^{ik(t-x)}dx \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(t-x)}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)D_n(t-x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} g(t-u)D_n(u)(-du)\end{aligned}$$

en posant le changement de variable affine $\mathcal{C}^1$ $u = t - x \Leftrightarrow x = t - u$. On a $dx = -du$
Enfin, l'intégrale d'une fonction 2π-périodique sur un segment de longueur 2π ne dépendant pas du segment choisi, on a :

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} g(t-u)D_n(u)(-du) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} g(t-u)D_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)du.$$

5. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} - g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)du - g(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)du - 2\pi g(t)\right)\\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t-u)D_n(u)du - g(t)\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)du\right) \quad \text{(d'après la question 1)}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (g(t-u)-g(t))D_n(u)du.\end{aligned}$$

Or, d'après la question 2, pour tout $u \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\}$,

$$(g(t-u)-g(t))D_n(u) = \frac{g(t-u)-g(t)}{\sin(u/2)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right).$$

Comme g est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $g(t-u) = g(t) - ug'(t) + o(u)$, donc

$$\frac{g(t-u)-g(t)}{\sin(u/2)} = \frac{-ug'(t)+o(u)}{u/2+o(u)} = -g'(t) + o(1) \underset{u\to 0}{\to} -g'(t),$$

Posons alors $\boxed{h_t : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(t-u)-g(t)}{\sin(u/2)} & \text{si } u \in [-\pi,\pi]\setminus\{0\} \\ -g'(t) & \text{si } u = 0 \end{cases}}$.
h_t est continue sur $[-\pi,\pi]$ (par construction) et, pour tout $u \in [-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} h_t(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) &= \begin{cases} \dfrac{g(t-u)-g(t)}{\sin(u/2)}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) & \text{si } u \neq 0 \\ -g'(t)\times 0 & \text{si } u = 0 \end{cases}\\ &= \begin{cases} (g(t-u)-g(t))D_n(u) & \text{si } u \neq 0 \\ (g(t-0)-g(t))D_n(0) & \text{si } u = 0 \end{cases}\\ &= (g(t-u)-g(t))D_n(u),\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(g(t-u)-g(t))D_n(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)du.$$

6. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Posons $u(x) = g(x)$, $u'(x) = g'(x)$, $v'(x) = e^{-inx}$, $v(x) = -\frac{1}{in}e^{-inx}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$, donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \left[-\frac{1}{in}g(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)e^{-inx} = \frac{1}{in}(g(\pi)-g(-\pi)) + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)e^{-inx}\\ &= \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g'(x)e^{-inx} \quad \text{(car } g \text{ est } 2\pi\text{-périodique, donc } g(\pi) = g(-\pi)).\end{aligned}$$

Posons alors $u(x) = g'(x)$, $u'(x) = g''(x)$, $v'(x) = e^{-inx}$, $v(x) = -\frac{1}{in}e^{-inx}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$, donc on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{in}\left(\left[-\frac{1}{in}g'(x)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{in}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)e^{-inx}dx\right)\\ &= -\frac{1}{n^2}(g'(\pi)-g'(-\pi)) - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)e^{-inx}dx\\ &= -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)e^{-inx}dx\end{aligned}$$

car g dérivable et 2π-périodique implique g' 2π-périodique (car $g(x+2\pi) = g(x) \Rightarrow 1 \times g'(x+2\pi) = g'(x)$) et donc $g'(\pi) = g'(-\pi)$.
Par suite, on a $|n^2 c_n(g)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} g''(x) e^{-inx} dx \right|$.
Or, pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $|g''(x)e^{-inx}| = |g''(x)| \leq \|g''\|_\infty^{[-\pi,\pi]}$ qui existe car g'' est continue sur le segment $[-\pi, \pi]$ (car g est $\mathcal{C}^2$), donc, par positivité de l'intégrale ($-\pi \leq \pi$), on a

$$|n^2 c_n(g)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} g''(x) e^{-inx} dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \|g''\|_\infty^{[-\pi,\pi]} dx = 2\pi \|g''\|_\infty^{[-\pi,\pi]},$$

donc

$$c_n(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad c_{-n}(g) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

7. Soit $t \in \mathbb{R}$.
   - $|c_n(g)e^{int}| = |c_n(g)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $\sum_{n\geq 1} c_n(g)e^{int}$ converge absolument, donc converge.
   On peut prouver de la même façon que $\sum_{n\geq 1} c_{-n}(g)e^{-int}$ converge.
   Ainsi,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)e^{-int} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k(g)e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(g)e^{-ikt} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt}.$$
   - Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} - g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_t(u) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) u\right) du \quad \text{(d'après la question 5)} \\ &= \frac{1}{2\pi} I_{n+1/2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \quad \text{(d'après la question 3 avec } h_t \text{ continue sur } [-\pi,\pi]), \end{aligned}$$
   donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt} = g(t)$.
   - Par unicité de la limite de $\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)e^{ikt}$, on a bien
   $$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)e^{-int}.$$

II Coordonnées polaires

8. • Soit $h : (r,t) \in]-\delta, \delta[\times \mathbb{R} \mapsto (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)$.
   h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}$ (car les deux fonctions coordonnées le sont).
   De plus, $g = f \circ h$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

• D'après la règle de la chaine, en posant $h(r,t)=(\varphi_1(r,t),\varphi_2(r,t))$, on a, pour tout $(r,t)\in]-\delta,\delta[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,t)+\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,t)=\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))+\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\\
\frac{\partial g}{\partial t}(r,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)+\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(r,t)=-r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))+r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\\
\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t) &= \cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,t)+\cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,t)\\
&\qquad+\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(r,t)+\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_2}{\partial r}(r,t)\\
&= \cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))+2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(h(r,t))+\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))\quad\text{(th. de Schwartz)}\\
\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t) &= -r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))-r\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)-r\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)\\
&\qquad-r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))+r\cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)+r\cos(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(r,t)\\
&= -r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))+r^2\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))-r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(h(r,t))\\
&\qquad-r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))-r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(h(r,t))+r^2\cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t)),
\end{aligned}$$

donc, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))=-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))$ (car f est harmonique), on a, pour tout $(r,t)\in]-\delta,\delta[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\left(r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+r\frac{\partial g}{\partial r}\right)(r,t)\\
&= r^2\cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))+2r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(h(r,t))+r^2\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))+r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))+r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\\
&= -r^2\cos^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h(r,t))+2r^2\cos(t)\sin(t)\frac{\partial^2 f}{\partial yx}(h(r,t))-r^2\sin^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(h(r,t))+r\cos(t)\frac{\partial f}{\partial x}(h(r,t))+r\sin(t)\frac{\partial f}{\partial y}(h(r,t))\\
&= -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t),
\end{aligned}$$

donc on a bien $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+r\frac{\partial g}{\partial r}=-\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ sur $]-\delta,\delta[\times\mathbb{R}$.

9. • Pour tout $r\in[0,\delta[$, $t\in[-\pi,\pi]\mapsto g(r,t)$ et continue sur $[-\pi,\pi]$, donc intégrable sur ce segment.
• Pour tout $t\in[-\pi,\pi]$, $r\in[0,\delta[\mapsto g(r,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\delta[$ (car g est $\mathcal{C}^2$ sur $]-\delta,\delta[\times\mathbb{R}$)
• Pour tout $r\in[0,\delta[$, comme g est $\mathcal{C}^2$ sur $]-\delta,\delta[\times\mathbb{R}$,
– $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi,\pi]$, donc continue par morceaux.
– $t\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[-\pi,\pi]$, donc continue par morceaux.
• Pour tout $A\in[0,\delta[$, pour tout $r\in[0,A]$, pour tout $t\in[-\pi,\pi]$,
– $(t,r)\mapsto\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)$ est continue sur le fermé borné $[0,A]\times[-\pi,\pi]$, donc est bornée. Il existe donc $K_1\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall r\in[0,A],\forall t\in[-\pi,\pi],\left|\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\right|\le K_1=\varphi_1(t)$$

où φ_1 est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ (fonction constante sur un segment)
– $(t,r)\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)$ est continue sur le fermé borné $[0,A]\times[-\pi,\pi]$, donc est bornée. Il existe donc $K_2\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall r\in[0,A],\forall t\in[-\pi,\pi],\left|\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\right|\le K_2=\varphi_2(t)$$

où φ_2 est intégrable sur $[-\pi,\pi]$ (fonction constante sur un segment)
• $J:r\mapsto\int_{-\pi}^{\pi}g(r,t)dt$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,A]$, ceci pour out $A\in[0,\delta[$, donc J est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\delta[$ et, pour tout $r\in[0,\delta[$,

$$J'(r)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)dt\quad\text{et}\quad J''(r)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)dt.$$

• Par suite, par linéarité de l'intégrale, pour tout $r \in]0,\delta[$,

$$\begin{aligned} rJ''(r)+J'(r) &= \frac{1}{r}(r^2J''(r)+rJ'(r)) = \frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi} r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)+r\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)dt \\ &= \frac{1}{r}\int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)dt = -\frac{1}{r}\left[\frac{\partial g}{\partial t}(r,t)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial g}{\partial t}(r,\pi)-\frac{\partial g}{\partial t}(r,-\pi)\right) \end{aligned}$$

Or, $t \mapsto g(r,t)$ est dérivable et 2π-périodique, donc $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(r,t)$ est 2π-périodique, donc

$$rJ''(r)+J'(r) = -\frac{1}{r}\left(\frac{\partial g}{\partial t}(r,\pi)-\frac{\partial g}{\partial t}(r,-\pi)\right) = 0.$$

• Enfin, comme J'' et J' sont continues sur $[0,\delta[$ (car J est $\mathcal{C}^2$), $r \mapsto rJ''(r)+J'(r)$ est continue sur $[0,\delta[$ comme somme et produit de fonctions continues, donc $0J''(0)+J'(0) = \lim\limits_{r\to 0^+} rJ''(r)+J'(r) = \lim\limits_{r\to 0^+} 0 = 0$.

• On a donc bien, pour tout $r \in [0,\delta[$, $rJ''(r)+J'(r) = 0$.

10. J' est donc solution sur $]0,\delta[$ de l'équation différentielle $ry'+y=0 \Leftrightarrow y'+\dfrac{1}{r}y = 0$.

Or, cette équation différentielle homogène a pour solution $y \mapsto Ke^{-\ln r} = \dfrac{K}{r}$, où $K \in \mathbb{C}$.

Il existe donc $K_0 \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $r \in]0,\delta[$, $J'(r) = \dfrac{K_0}{r}$.

Comme J' est continue sur $[0,\delta[$, elle est continue en 0, donc $\lim\limits_{r\to 0^+} J'(r) = J'(0)$.

Or, si $K_0 \neq 0$, $r \mapsto \dfrac{K_0}{r}$ n'a pas de limite finie en 0, donc on a $K_0 = 0$ et, par suite, $J'(r) = 0$ pour tout $r \in]0,\delta[$ et donc, par continuité de J' en 0, pour tout $r \in [0,\delta[$.

Comme J' est nulle sur l'intervalle $[0,\delta[$, J est constante sur $[0,\delta[$.

III Problème de Dirichlet

11. Supposons que la fonction f admette un extremum global en (x_0,y_0).

• Supposons que cet extremum soi un maximum. Alors, pour tout $(x,y) \in U$, $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.
Soit $\delta > 0$ tel que $B(m_0,\delta) \subset U$ et reprenons la fonction J de la partie précédente.
Elle est constante sur $[0,\delta[$, donc, pour tout $r \in [0,\delta[$,

$$J(0)-J(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos t, y_0+r\sin t)dt = 0.$$

Or,
– $t \mapsto f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t)$ est continue sur $[-\pi,\pi]$
– comme, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, $(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t) \in U$, $f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t) \geq 0$
– $\pi > -\pi$

donc $t \mapsto f(x_0,y_0)-f(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t)$ est nulle sur $[-\pi,\pi]$.
D'où, pour tout $r \in [0,\delta[$, pour tout $t \in [-\pi,\pi]$, $f(x_0+r\cos t,y_0+r\sin t) = f(x_0,y_0)$, donc f est constante sur la boule $B(m_0,\delta)$.

• On procède de manière analogue (en calculant cette fois-ci $J(r)-J(0)$) si f présente un minimum local en m_0.

12. f est continue sur K, fermé borné, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc $(m_0,M_0) \in K^2$ tel que $\forall (x,y) \in K$, $f(m_0) \leq f(x,y) \leq f(M_0)$.

• Si $m_0 \in \mathrm{Fr}(K)$, alors, pour tout $(x,y) \in K$, $f(x,y) \geq f(m_0) = 0$.
Si $m_0(x_0,y_0) \in \mathring{K}$, notons $d = \mathrm{dist}(m_0,\mathrm{Fr}(K))$.
Alors $d > 0$ (car sinon, $m_0 \in \mathrm{Fr}(K)$ (car $\mathrm{Fr}(K)$ est un fermé), donc $m_0 \notin \mathring{K}$.
D'après la question précédente, f est constante sur $B(m_0,d)$.
Soit alors $m_1 \in \mathrm{Fr}(K)$ tel que $\|m_0-m_1\| = \min\{\|m-m_0\|, m \in \mathrm{Fr}(K)\} = d$. ($m_1$ existe car $m \in \mathrm{Fr}(K) \mapsto \|m-m_0\|$ est continue sur $\mathrm{Fr}(K)$, fermé borné).
Comme f est continue sur K, donc en m_1,

$$0 = f(m_1) = \lim_{t\to 0} f\underbrace{(tm_0+(1-t)m_1)}_{\in B(m_0,d)} = \lim_{t\to 0} f(m_0) = f(m_0),$$

donc $f(m_0) = 0$ et, pour tout $(x,y) \in K$, $f(x,y) \geq 0$.
Quelle que soit la position de m_0, on a donc : pour tout $(x,y) \in K$, $f(x,y) \geq 0$.

• En travaillant de façon analogue sur M_0, on obtient que, pour tout $(x,y) \in K$, $f(x,y) \leq 0$.

• On a donc, pour tout $(x,y) \in K$, $0 \leq f(x,y) \leq 0$, donc $f(x,y) = 0$.

13. • Cherchons une fonction f_0 solution du problème sous la forme $f_0 : (x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$.
Analyse : Si f_0 existe, alors

– comme pour tout $x \in [0,2\pi]$, $f_0(x,0) = \sin(x)$, on a $\varphi(x)\psi(0) = \sin(x)$, donc $\psi(0) \neq 0$ (sinon, $\varphi(\pi/2)\psi(0) = 0 \neq \sin(\pi/2)$) et :

$$\forall x \in [0,2\pi], \qquad \varphi(x) = \frac{\sin x}{C} \quad \text{en posant } C = \psi(0) \neq 0.$$

– comme pour tout $x \in [0,2\pi]$, $f_0(x,2\pi) = 0$, on a $\varphi(x)\psi(2\pi) = 0$, donc $\dfrac{\sin x}{C}\psi(2\pi) = 0$, donc, en appliquant en $x = \pi/2$, on obtient $\psi(2\pi) = 0$.

– f_0 doit être de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathring{K}$, donc $\psi : y \mapsto \dfrac{f_0(\pi/2,y)}{\varphi(\pi/2)} = Cf_0(\pi/2,y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,2\pi[$.

$\varphi : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\varphi(0)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,2\pi]$.

– On a alors, pour tout $(x,y) \in \mathring{K}$,

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) = \varphi'(x)\psi(y) = \cos x \frac{\psi(y)}{C}, \qquad \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x \frac{\psi(y)}{C},$$
$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y) = \varphi(x)\psi'(y) = \sin x \frac{\psi'(y)}{C} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2}(x,y) = \sin x \frac{\psi''(y)}{C}.$$

Donc, comme on veut f_0 harmonique sur $\mathring{K}$, on a, pour tout $(x,y) \in \mathring{K}$,

$$(\Delta f_0)(x,y) = 0, \text{ donc } -\sin x \frac{\psi(y)}{C} + \sin x \frac{\psi''(y)}{C} = 0,$$

donc, en prenant $x = \pi/2$, on obtient, pour tout $y \in]0,2\pi[$, $\psi''(y) - \psi(y) = 0$, donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $y \in]0,2\pi[$, $\psi(y) = Ae^y + Be^{-y}$.

– comme de plus $\psi(2\pi) = 0$ et $\psi(0) = C$, on a

$$\begin{cases} A + B = C \\ Ae^{2\pi} + Be^{-2\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}C \\ A = \dfrac{e^{-2\pi}}{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}C \end{cases}.$$

– Enfin, f_0 doit être continue sur K, donc ψ doit être continue sur $[0,2\pi]$ et on a donc :

$$\psi : y \in [0,2\pi] \mapsto C\left(\frac{e^{-2\pi}}{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}e^y + \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}e^{-y}\right)$$

et donc

$$f_0 : (x,y) \in K \mapsto \sin(x)\left(\frac{e^{-2\pi}}{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}e^y + \frac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}e^{-y}\right).$$

Synthèse : Réciproquement, avec un tel choix pour f_0,
– f_0 est continue sur le carré fermé K ;
– f_0 est harmonique sur le carré ouvert $\mathring{K}$ par construction de f_0
– $\forall x \in [0,2\pi]$, $\quad f_0(x,0) = \sin(x)$;
– $\forall x \in [0,2\pi]$, $\quad f_0(x,2\pi) = 0$;
– $\forall y \in [0,2\pi]$, $\quad f(0,y) = \sin(0) \times ... = 0$ et $f(2\pi,y) = \sin(2\pi) \times ... = 0$.

Conclusion : $f_0 : (x,y) \in K \mapsto \sin(x)\left(\dfrac{e^{-2\pi}}{e^{-2\pi} - e^{2\pi}}e^y + \dfrac{e^{2\pi}}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}e^{-y}\right)$ est l'unique fonction de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$ vérifiant les 5 conditions.

• Supposons qu'il existe une autre fonction f_1 (pas nécessairement sous la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$) qui soit solution du problème posé.

Alors $f = f_1 - f_0 : K \to \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles, continue sur le carré fermé $K = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$, harmonique sur $\mathring{K}$, et nulle sur la frontière $\mathrm{Fr}(K)$ de ce carré, donc f est nulle sur K d'après la question 12, donc $f_1 = f_0$ sur K, ce qui prouve l'unicité de la solution de ce problème.

IV Développement en série

14. • Reprenons les notations de la question 8 (en prenant $(x_0,y_0) = (0,0)$) et posons

$$j : (r,t) \in]-R,R[\times \mathbb{R} \mapsto f(r\cos t, r\sin t)e^{-int} = g(r,t)e^{-int}.$$

Alors on a :

$$\frac{\partial j}{\partial r}(r,t) = e^{-int}\frac{\partial g}{\partial r}(r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 j}{\partial r^2}(r,t) = e^{-int}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t).$$

• Le même raisonnement qu'à la question 9 (la multiplication par e^{-int} ne change rien, car $t \mapsto e^{int}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $|e^{-int}| = 1$) permet de montrer que v_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, R[$, et, pour tout $r \in [0, R[$,

$$v_n'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)dt \quad \text{et} \quad v_n''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned} r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\right)dt \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)dt \quad \text{(relation vérifiée par } g \text{ prouvée à la question 8)} \end{aligned}$$

La double intégration par parties faite à la question 6, appliquée à la fonction $g_0 : x \mapsto g(r,x)$, de classe $\mathcal{C}^2$, a établi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(r,x)e^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} g_0(x)e^{-inx}dx = -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} g_0''(x)e^{-inx}dx = -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,x)dx,$$

donc

$$r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)dt = n^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(r,t)e^{-int}dt = n^2 v_n(r),$$

donc v_n vérifie bien la relation (E_n).

15. On prend ici la convention $\ln(+\infty) = +\infty$.
• Soit $n \in \mathbb{Z}^*$
Posons le changement de variable $r = e^s \Leftrightarrow s = \ln r$.
Soit $y : s \in]-\infty, \ln(R)[\mapsto v_n(e^s)$. Alors, pour tout $r \in]0, R[$, $v_n(r) = y(\ln r)$.
Par suite, on a $v_n'(r) = \frac{1}{r}y'(\ln r)$ et $v_n''(r) = -\frac{1}{r^2}y'(\ln r) + \frac{1}{r^2}y''(\ln r)$, donc

$$\begin{aligned} \forall r \in]0,R[, \quad r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0 &\Leftrightarrow \forall r \in]0,R[, \quad y''(\ln r) - y'(\ln r) + y'(\ln r) - n^2 y(\ln r) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall s \in]-\infty, \ln(R)[, \quad y''(s) - n^2 y(s) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C} : \forall s \in]-\infty, \ln(R)[, \quad y(s) = Ae^{|n|s} + Be^{-|n|s} \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C} : \forall r \in]0,R[, \quad v_n(r) = Ae^{|n|\ln(r)} + Be^{-|n|\ln(r)} \\ &\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{C} : \forall r \in]0,R[, \quad v_n(r) = Ar^{|n|} + Br^{-|n|}. \end{aligned}$$

• Pour $n = 0$, en posant le même changement de variable, on obtient $y''(s) = 0$, puis $y(s) = Bs + A$, puis $v_n(r) = B\ln(r) + A$.
• Les solutions de l'équation (E_n) sur $]0, R[$ sont donc

$$\begin{cases} v_n : r \mapsto Ar^{|n|} + Br^{-|n|} & \text{si } n \neq 0 \\ v_n : r \mapsto B\ln r + A & \text{si } n = 0 \end{cases}, \qquad (A,B) \in \mathbb{C}^2.$$

16. • Soit $n \neq 0$.
Analyse : Si v_n est solution de (E_n) sur $[0, R[$, alors v_n est solution sur $]0, R[$, donc il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$: pour tout $r \in]0, R[$, $v_n(r) = Ar^{|n|} + Br^{-|n|}$.
Comme on cherche une solution de (E_n) sur $[0, R[$, cette solution doit être continue en 0, donc doit avoir une limite finie en 0.
Or, $\lim_{r \to 0} Ar^{|n|} = 0$ et, si $B \neq 0$, $Br^{-|n|}$ n'a pas une limite finie quand $r \to 0$.
On doit donc avoir $B = 0$ et, par suite, pour tout $r \in]0, R[$, $v_n(r) = Ar^{|n|}$, expression encore valable pour $r = 0$ (par continuité), donc, pour tout $r \in [0, R[$, $v_n(r) = Ar^{|n|}$.
Synthèse : Pour $v_n(r) = Ar^{|n|}$, v_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, R[$ et,
– pour $r = 0$, $r^2 v_n''(r) + r v_n'(r) - n^2 v_n(r) = 0 + 0 - n^2 \times 0 = 0$,
– v_n est solution de (E_n) sur $]0, R[$ par analyse.
donc $v_n : r \in [0, R[\mapsto Ar^{|n|}$ est solution de (E_n) sur $[0, R[$.
• Si $n = 0$.
Analyse : Si v_0 est solution de (E_0) sur $[0, R[$, alors v_0 est solution sur $]0, R[$, donc il existe $(A, B) \in \mathbb{C}^2$: pour tout $r \in]0, R[$, $v_0(r) = B\ln r + A$.
Comme on cherche une solution de (E_0) sur $[0, R[$, cette solution doit être continue en 0, donc doit avoir une limite finie en 0.
Or, si $B \neq 0$, $B\ln r$ n'a pas une limite finie quand $r \to 0$.
On doit donc avoir $B = 0$ et, par suite, pour tout $r \in]0, R[$, $v_0(r) = A$, expression encore valable pour $r = 0$ (par continuité), donc, pour tout $r \in [0, R[$, $v_0(r) = A$.
Synthèse : Dans ce cas, il est évident que $v_0 : r \mapsto A$ est solution de (E_0).
• **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc bien $A \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $r \in [0, R[$, $v_n(r) = Ar^{|n|}$.

17. Soit $r \in [0, R[$ fixé et posons $g : t \mapsto f(r\cos t, r\sin t)$.
g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique, et, en reprenant les notations de la partie I, on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(g) = v_n(r)$, et, d'après la question 7, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(r\cos t, r\sin t) = g(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(g)e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(g)e^{-int} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(r)e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} v_{-n}(r)e^{-int} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^{|n|}e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} r^{|-n|}(g)e^{-int} \quad \text{(d'après la question 16)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(re^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}(re^{-it})^n. \end{aligned}$$

18. Si f est bornée sur $\mathbb{R}^2$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f(r\cos t, r\sin t)| \leq M$.
Alors, par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n(r)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(r\cos t, r\sin t)e^{-int}|dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M dt = M.$$

Or, pour tout $r \in [0, +\infty[$, $v_n(r) = a_n r^{|n|}$ (d'après la question 16, car f est harmonique).
Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, si $a_n \neq 0$, $|v_n(r)| = |a_n r^{|n|}| \underset{r\to+\infty}{\to} +\infty$, ce qui est exclu, car on a $|v_n(r)| \leq M$.
On a donc $a_n = 0$ pour tout $n \neq 0$, donc, en reprenant l'écriture obtenue à la question 17, on a :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(r\cos t, r\sin t) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_n}_{=0}(re^{it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{a_{-n}}_{=0}(re^{-it})^n = a_0,$$

donc f est constante sur $\mathbb{R}^2$.

V Théorème de DAlembert-Gauss

19. $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + iy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^{\in}$.
De plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P'(x + iy), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = iP'(x + iy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = P''(x + iy) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -P''(x + iy).$$

On a donc bien, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(\Delta f)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = P''(x + iy) - P''(x + iy) = 0,$$

donc f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

20. $g : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{f(x, y)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui ne s'annule pas sur U.
Pour tout $(x, y) \in U$, $g(x, y) = \dfrac{1}{P(x + iy)}$, donc

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{P'(x + iy)}{P(x + iy)^2}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{iP'(x + iy)}{P(x + iy)^2}, \\ &\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{P''(x + iy)(P(x + iy))^2 - 2(P'(x + iy))^2 P(x + iy)}{(P(x + iy))^4} \\ \text{et} \quad &\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{-P''(x + iy)(P(x + iy))^2 + 2(P'(x + iy))^2 P(x + iy)}{(P(x + iy))^4}, \end{aligned}$$

donc $(\Delta g)(x, y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 0$, donc g est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

21. Comme P est supposé non constant, il est de degré $n \geq 1$, donc il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ avec $a_n \neq 0$ tel que

$$P(z) = a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Par suite,

$$|P(z)| \geq |a_n|.|z|^n - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \geq |a_n|.|z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|.|z|^k.$$

Or, comme $|a_n| \neq 0$, par croissances comparées, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |a_n| \cdot |z|^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k = +\infty$, donc, par définition d'une limite infinie, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $|z| \geq A$, $|a_n| \cdot |z|^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k \geq 1$.

Par suite, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq A$,

$$|P(z)| \geq |a_n| \cdot |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k \geq 1.$$

22. Soit P un polynôme complexe non constant et supposons que P n'ait pas de racine sur $\mathbb{C}$.
• D'après la question précédente, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| \geq A$, alors $|P(z)| \geq 1$, donc,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \text{ tel que } \|(x, y)\| \geq A, \quad |g(x, y)| = \frac{1}{|P(x + iy)|} \leq 1.$$

Comme P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ (par hypothèse), $g = \dfrac{1}{f}$ est harmonique, donc de classe $\mathcal{C}^2$, donc continue sur $\mathbb{R}^2$, donc, comme g est continue sur $\overline{B(0, A)}$, fermé borné de $\mathbb{R}^2$, elle est bornée sur $\overline{B(0, A)}$.
g est donc bornée sur $\overline{B(0, A)}$ et sur $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, A)$, donc g est bornée sur $\mathbb{R}^2$.
• g est donc harmonique (question 20) et bornée sur $\mathbb{R}^2$, donc, d'après la question 18, g est constante, donc il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = c$.
Mais, par suite, on a alors, pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = P(x + iy) = \frac{1}{g(x, y)} = \frac{1}{c},$$

donc P est constant. C'est exclu.
• D'où, par l'absurde, « tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe »(Théorème de d'Alembert-Gauss)