$\boxed{\text{Correction MATH II PC Mines 2017}}$

I. Exponentielle tronquée

1. Soient $x>0$ et $n\in\mathbb{N}$. $\dfrac{(nx)^k}{k!}=o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc la série $\sum\dfrac{(nx)^k}{k!}$ converge et le reste d'ordre n est bien défini. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nx)^k}{k!}=e^{nx}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x>0,\ R_n(x) \text{ est bien défini, et } T_n(x)+R_n(x)=e^{nx}.}$$

2. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=e^{nt}$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(k)}(t)=n^k\,e^{nt}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. En particulier, f est $\mathcal{C}^{n+1}$ donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x à l'ordre n :
$$\underbrace{f(x)}_{=e^{nx}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}.(x-t)^n\ dt=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}.x^k}_{=T_n(x)}+\int_0^x\frac{n^{n+1}e^{nt}}{n!}(x-t)^n\ dt$$
D'où : $R_n(x)=e^{nx}-T_n(x)=\dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^x e^{nt}(x-t)^n\ dt$
On effectue le changement de variable $u=x-t$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :
$$\int_0^x e^{nt}(x-t)^n\ dt=\int_x^0 e^{n(x-u)}u^n(-du)=e^{nx}\int_0^x(ue^{-u})^n\ du$$

$$\boxed{\forall x>0,\quad R_n(x)=\frac{n^{n+1}e^{nx}}{n!}\int_0^x(ue^{-u})^n\ du}$$

3. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+2}y^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^{n+1}y^n}=y\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=y\underbrace{e^{\overbrace{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})}^{\sim\frac{n+1}{n}\sim 1}}}_{\longrightarrow e^1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=ye}$$

Si $y<e^{-1}$, alors $\dfrac{a_n+1}{a_n}\underset{k\to+\infty}{\longrightarrow}=\alpha$ avec $|\alpha|<1$. Dans ce cas, d'après le critère d'Alembert, la série $\sum a_n$ converge. Et si elle converge, alors nécessairement, $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}a_n=0$.

$$\boxed{\text{Si } y<1, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty}a_n=0.}$$

4. La fonction $h : u\mapsto ue^{-u}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et de dérivée $h'(u)=(1-u)e^{-u}$. Cette dérivée ne s'annulant qu'en 1 et est positive sur $[0;1]$ et négative sur $[1;+\infty[$. Donc h est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Pour tout $u\in[0,x]$, $h(u)\leqslant h(x)$. En posant $M:=h(x)$, on voit que M est un maximum de la fonction h sur $[0,x]$. De plus, $M=h(x)<h(1)=e^{-1}$.

$$\boxed{\text{La fonction } u\mapsto ue^{-u} \text{ admet sur } [0,x] \text{ un maximum } M \text{ tel que } M<e^{-1}.}$$

D'après ce que l'on vient de dire, $\int_0^x (ue^{-u})^n \, du \leqslant xM^n$ d'où :

$|R_n(x)| \leqslant e^{nx} x a_n$ où $a_n = \dfrac{n^{n+1} M^n}{n!}$. Comme $M < e^{-1}$, $xa_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où $R_n(x) = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0;1[, \quad R_n(x) = o(e^{nx})}$$

On rappelle que $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x)$ d'où $T_n(x) - e^{nx} = o(e^{nx})$.

$$\boxed{\text{Si } x \in]0;1[, \quad T_n(x) \underset{+\infty}{\sim} e^{nx}}$$

5. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$.

   Initialisation :

   $\int_0^{+\infty} t^0 e^{-t} \, dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1 = 0!$
   La propriété est donc vraie au rang initial.

   Hérédité :

   Considérons un certain $n \in \mathbb{N}$ tel que $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$.

   Alors $n! \underbrace{=}_{\text{IPP}} \underbrace{\left[\dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} -\dfrac{t^{n+1}}{n+1} e^{-t} \, dt$ d'où $(n+1)n! = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \, dt$ ce qui conclut la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt}$$

6. Montrons tout d'abord que $\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du \dfrac{n^{n+1}}{n!} = 1$.

   Par le changement de variable $nu = t$, on a : $\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{t}{n}\right)^n e^{-t} \dfrac{dt}{n} = \dfrac{1}{n^{n+1}}.n!$

$$\begin{aligned} T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du \; - \; e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n \, du \\ &= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du - \int_0^x (ue^{-u})^n \, du \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \, du}$$

7. Si $x > 1$ alors, comme f est décroissante sur $[x, +\infty[$, $ue^{-u} \leqslant xe^{-x}$. En intégrant l'inégalité $(ue^{-u})^n \leqslant (xe^{-x})^{n-1} ue^{-u}$ entre x et $+\infty$ on obtient $\dfrac{R_n(x)}{e^{nx}} \leqslant \dfrac{n^{n+1} y^n}{n!} M$ avec $y = xe^{-x} < e^{-1}$ et $M = (xe^{-x})^{-1} \int_0^{+\infty} ue^{-u} du$. Donc $\dfrac{R_n(x)}{e^{nx}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 0$:

$$\boxed{\text{Si } x > 1, \quad R_n(x) = o(e^{nx})}$$

II. Méthode de Laplace

8. Supposons que $f'(0) \neq 0$. Alors $f(x) - 1 \sim xf'(0)$ au voisinage de 0. Or le terme de gauche est toujours strictement négatif d'après $(H3)$, tandis que le terme de droite change de signe strictement en 0. C'est absurde.

$$\boxed{f'(0) = 0}$$

On écrit $f(x) = 1 + g(x)$ avec $g(x) \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln(1+g(x)) \underset{0}{\sim} -\dfrac{1}{x^2}g(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{2}}$$

9. Supposons que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ n'est égal à 0. Alors, on peut prolonger φ par continuité sur le segment $[-1;1]$ en posant $\varphi(\pm 1) = -\ln(f(\pm 1))$. φ admet donc un minimum sur $[-1;1]$. Ce minimum -notons le a- est strictement positif puisque φ est elle-même strictement positive sur $[-1;1]$. En particulier, φ minorée sur $]-1;1[$ par a.
Si $f(-1)$ ou $f(1)$ est nul. Supposons par exemple que $f(1) = 0$. Alors φ diverge vers $+\infty$ en 1. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\varphi \geqslant 1$ sur $[1-\epsilon;1[$. Par ailleurs, φ est continue sur $[0;1-\epsilon]$, elle y admet donc un minimum $m_1 > 0$. φ est minorée par $a_1 := \min(m_1;1)$ sur $[0;1[$.
De même en -1 si $f(-1) \neq 0$. Si $f(-1) = 0$, on est ramené au cas précédent. Dans tous les cas, φ admet un minorant $a_2 > 0$ sur $]-1:1]$.
On prend $a := \min(a_1;a_2)$. Soit $x \in]-1;1[$. $-\dfrac{1}{x^2}\ln(f(x)) \geqslant a \Rightarrow f(x) \leqslant e^{-ax^2}$. Par continuité des fonctions f et $x \mapsto e^{-ax^2}$ en -1 et 1, cette inégalité reste vraie pour $x = \pm 1$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est minorée par un réel } a \text{ strictement positif tel que pour tout } x \in [-1;1[\text{, on ait : } f(x) \leqslant e^{-ax^2}.}$$

10. La fonction g_n est continue sur $[-\sqrt{n};\sqrt{n}]$ en tant que composée de fonctions continues. Elle est trivialement continue sur $]-\infty;-\sqrt{n}]$ et sur $[\sqrt{n};+\infty[$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ g_n \text{ est continue par morceaux sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $u \in \mathbb{R}$. A partir d'un certain rang, $u \in [-\sqrt{n};\sqrt{n}]$ donc :
$g_n(u) = \left(f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{-u^2\varphi\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}$ APCR. Or $\varphi\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(0) = \dfrac{1}{2}$.
Donc $g_n(u) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{u^2}{2}}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (g_n)_n \text{ converge simplement vers la fonction } g : u \mapsto e^{-\frac{u^2}{2}}.}$$

11. Posons $I_n := \displaystyle\int_{-1}^{1}(f(x))^n\ dx$. On effectue le changement de variable $x = \dfrac{u}{\sqrt{n}}$:
$I_n = \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\frac{du}{\sqrt{n}}$ d'où $\sqrt{n}I_n = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_n \underset{n\to+\infty}{\overset{TCD}{\longrightarrow}} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}$. Il reste à justifier l'utilisation du Théorème de Convergence Dominée :
   i) (g_n) est une suite de fonctions continues par morceaux convergeant simplement vers une une fonction g également continue par morceaux.
   ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathbb{R}$, $|g_n(u)| \leqslant g(u) = e^{-au^2}$. L'inégalité est claire si $u \in]-\infty;-\sqrt{n}[\cup]\sqrt{n},+\infty[$. Sinon, $\dfrac{u}{\sqrt{n}} \in [-1;1]$ et dans ce cas, on dispose de l'inégalité $f\left(\dfrac{u}{\sqrt{n}}\right) \leqslant e^{-a\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)^2}$ qui élevée à la puissance n nous donne $g_n(u) \leqslant e^{-au^2}$.
   iii) g est une fonction positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car $a > 0$).

$$\boxed{\int_{-1}^{1}(f(x))^n\ dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

III. Formule de Stirling

12. Partons du membre de droite : $e^{-n}(I_n + J_n) = \displaystyle\int_{-1}^{+\infty} (1+x)^n e^{-n(x+1)}\ dx \underset{u=n(x+1)}{=} \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n}\right)^n e^{-u}\ \frac{du}{n} = \frac{n!}{n^{n+1}}$ d'après la question 5.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad n! = n^{n+1} e^{-n}(I_n + J_n)}$$

13. On pose $h : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2^x - x - 1$. h est de classe $\mathcal{C}^2$ et $h'(x) = (\ln 2)2^x - 1$ et $h''(x) = (\ln 2)^2 2^x \geqslant 0$. Donc h' est croissante. Or $h'(1) = 2\ln 2 - 1 \geqslant 0$. Donc h' est positive d'où h est croissante : pour tout $x \geqslant 1, h(x) \geqslant h(1) = 0$ *i.e.* $2^x - x - 1 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \geqslant 1, \quad x + 1 \leqslant 2^x.}$$

D'après ce qui précède, $J_n \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} (2^x)^n e^{-nx}\ dx = \int_1^{+\infty} e^{n(\ln 2 - 1)x}\ dx = \left[\frac{e^{n(\ln 2-1)x}}{n(\ln 2 - 1)}\right]_1^{+\infty}$.

D'où $J_n \leqslant \dfrac{e^{n(\ln 2 - 1)}}{n(1 - \ln 2)} \leqslant \dfrac{1}{n(1-\ln 2)}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ J_n \leqslant \frac{C}{n} \text{ où } C = \frac{1}{1 - \ln 2}.}$$

14. On pose $f(x) = (1+x)e^{-x}$ de sorte que $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (f(x))^n\ dx$. f est de classe $\mathcal{C}^2$.

(**H1**) $f(0) = 1$ est clair.

(**H2**) $f''(x) = (-1+x)e^{-x}$ donc on a bien $f''(0) = -1$.

(**H3**) Soit $x \in]-1; 1[\setminus\{0\}$. On a bien $f(x) > 0$. D'autre part, l'inégalité de convexité de l'exponentielle s'écrit $e^x \geqslant x + 1$ (l'égalité n'ayant lieu qu'en 0) d'où $f(x) = (1+x)e^{-1} < 1$.

(**H4**) $f(-1) = 0$ et $f(1) = 2e^{-1}$. Sachant que $e \approx 2,67$, on a bien $f(-1), f(1) \in [0; 1[$.

D'après la question 11 :

$$\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}$$

15. D'après les questions précédentes, $J_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $I_n = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $J_n = o(I_n)$ et $I_n + J_n \sim I_n$.

On a alors $n! \sim n^{n+1}e^{-n} I_n \sim n^{n+1} e^{-n}\sqrt{2\pi} n^{-\frac{1}{2}}$ d'où :

$$\boxed{n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

IV. Formule de Bernstein

16. La question 2 nous donne $R_n(1) = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 u^n e^{(1-u)n}\ du \underset{t=1-u}{=} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_1^0 (1-t)^n e^{nt}\ (-dt)$:

$$\boxed{R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\ dt}$$

17. On identifie l'intégrale ci-dessus comme étant $\displaystyle\int_0^1 (f(-t))^n\ dt$ où f est la fonction introduite à la question 14. On vérifie sans peine que la fonction $t \mapsto f(-t)$ vérifie les mêmes hypothèses que f. La question 11 nous donne un équivalent de cette intégrale quand $n \to +\infty$.

$R_n(1) \sim \dfrac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi} n^n n^{\frac{1}{2}} e^{-n}} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \sim \dfrac{e^n}{2}$.

$$\boxed{R_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}}$$

Comme $T_n(1)+R_n(1)=e^{1.n}$ d'après la question 1, $T_n(1)=e^n-\frac{e^n}{2}-o\left(\frac{e^n}{2}\right)=\frac{e^n}{2}+o\left(\frac{e^n}{2}\right)$.

$$\boxed{T_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}}$$

V. Première répétition

18. Je propose le code suivant :

```
def X(liste):

M=[liste[0]]
i=1
while liste[i] not in M:    % on teste si l'élément regardé a déjà été enregistré
  M.append(liste[i])                       comme appartenant à la liste liste.
  i=i+1
return i+1                  % car les listes en python sont indicées à partir de 0.
```

19. $P(X=k)=\dfrac{A_k}{\text{Card}(\Omega)}$ où $A_k=\text{Card}(X^{-1}(\{k\}))$ puisque le tirage d'un élément w de Ω est uniforme (ceci vient du fait que les VAD U_j sont uniformes et indépendantes). Pour que $P(X=k)\neq 0$, il suffit que $X^{-1}(\{k\})$ soit non vide. $w=(1,2,\dots,k-1,1,1\dots,1)$ est tel que $X(w)=k$ donc :

$$\boxed{\forall k\in [\![2;n+1]\!],\quad P(X=k)\neq 0}$$

20. Soit $k\in[\![0;n-1]\!]$. $(\{X>k\},\{X\leqslant k\})$ forme un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X>k+1)=P(X>k+1|X>k)P(X>k)+P(X>k+1|X\leqslant k)P(X\leqslant k)$$

Or $P(X>k+1|X\leqslant k)=0$ d'où :

$$\boxed{\forall k\in [\![0;n-1]\!],\quad P(X>k+1)=P(X>k+1|X>k)P(X>k)}$$

21. Soit $k\in[\![0;n]\!]$. Comme $P(X=i)$ est non nul pour $i=1,\dots,k-1$:
$P(X>k)=\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}\frac{P(X>i+1)}{P(X>i)}.P(X>1)=\prod_{i=1}^{k-1}P(X>i+1|X>i)1.$
Or $P(X>i+1|X>i)$ est la probabilité que le $i+1$-ème élément est différent des i premiers sachant que ceux-ci sont distincts deux à deux. Le $i+1$-ème élément peut donc prendre $n-i$ valeurs possible, et comme U_{i+1} est uniforme sur $[\![1;n]\!]$: $P(X>i+1|X>i)=\dfrac{n-i}{n}$.
$P(X>k)=\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n-i}{n}=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}}=\frac{n!}{n^k(n-k)!}$.

$$\boxed{\forall k\in [\![0;n]\!],\quad P(X>k)=\frac{n!}{n^k(n-k)!}}$$

22. Pour des facilités de calculs, on considère que la v.a. X peut prendre la valeur 1 avec une probabilité nulle.
$E(X)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{k}P(X=k)=\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{k=i}^{n+1}P(X=k)=\sum_{i=1}^{n+1}P(X\geqslant i)=\sum_{i=0}^{n}P(X>i).$

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=0}^{n}P(X>k)}$$

23. $E(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{n^n(n-k)!}=\frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{n!}{n^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{n!}{n^n}T_n(1)$.

    Or d'après la question 17, $T_n(1)\sim\frac{e^n}{2}$ d'où $E(X)\sim\frac{\sqrt{2\pi n}}{n^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.\frac{e^n}{2}=\sqrt{\frac{\pi n}{2}}$ d'où :

$$\boxed{E(X)\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi n}{2}}}$$

$***$ Fin de la correction $***$