Corrigé de Mines 2015 PC math 2

I Préliminaires

1. $F_2(\lambda) = 1 + 2\lambda$ et $L_2(\lambda) = (1+2\lambda)^2 + 2(1-\lambda-\lambda^2) = 3 + 2\lambda + 2\lambda^2$.

2. Si $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}I$ quand $a+d=0$ et $a^2+bc = \frac{5}{4}$.

   On peut prendre par exemple $a = d = 0$, b non nul et $c = \frac{5}{4b}$, on obtient une infinité de matrices qui vérifient c).

3. Supposons $\alpha I + \beta J = 0$. Si $\beta \neq 0$, on déduit que J est multiple de I: contradiction.

   Donc $\beta = 0$ d'où $\alpha I = 0$, d'où $\alpha = 0$: la famille (I, J) est libre.

Contrairement à ce qui est écrit, la matrice J n'est pas quelconque vérifiant $J^2 = \frac{5}{4}I$.
Elle doit vérifier aussi: J n'est pas multiple de I, donc la famille (I, J) est libre.

II Formule de Moivre généralisée

4. $(X + \lambda + \frac{1}{2})^2 = X^2 + (2\lambda+1)X + (\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4}) = (X^2 - \frac{5}{4}) + (2\lambda+1)X + (\lambda^2+\lambda+\frac{3}{2})$.
   On peut donc prendre $Q(X) = 1$ et $T(X) = (2\lambda+1)X + (\lambda^2+\lambda+\frac{3}{2})$.

5. $R(\lambda)^2 = J^2 + (2\lambda+1)J + (\lambda^2+\lambda+\frac{1}{4})I = (2\lambda+1)J + (\lambda^2+\lambda+\frac{3}{2})I$.
   $R(\lambda)^2 = (2\lambda+1)R(\lambda) - (2\lambda+1)(\lambda+\frac{1}{2})I + (\lambda^2+\lambda+\frac{3}{2})I = (2\lambda+1)R(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)I$.

6. De $R(\lambda)(R(\lambda) - (2\lambda+1)I) = (1-\lambda-\lambda^2)I$ on déduit, puisque $1-\lambda-\lambda^2 \neq 0$, que $R(\lambda)$ est inversible et a pour inverse $\frac{1}{1-\lambda-\lambda^2}(R(\lambda) - (2\lambda+1)I) = \frac{1}{1-\lambda-\lambda^2}(J - (\lambda+\frac{1}{2})I)$ qui est bien le résultat demandé.

7. D'après (7), $F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I = R(\lambda)^{n+1} = R(\lambda)^n R(\lambda) = (F_n(\lambda)J + \frac{1}{2}L_n(\lambda)I)(J + (\lambda+\frac{1}{2})I) = F_n(\lambda)J^2 + (\frac{1}{2}L_n(\lambda) + (\lambda+\frac{1}{2})F_n(\lambda))J + \frac{1}{2}L_n(\lambda)(\lambda+\frac{1}{2})I$.
   Avec $J^2 = \frac{5}{4}I$ on obtient $F_{n+1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I = (\frac{1}{2}L_n(\lambda) + (\lambda+\frac{1}{2})F_n(\lambda))J + (\frac{1}{2}L_n(\lambda)(\lambda+\frac{1}{2}) + \frac{5}{4}F_n(\lambda))I$.
   Comme la famille (I, J) est libre on déduit: $F_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}L_n(\lambda) + (\lambda+\frac{1}{2})F_n(\lambda)$ et $\frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda) = \frac{1}{2}L_n(\lambda)(\lambda+\frac{1}{2}) + \frac{5}{4}F_n(\lambda)$. En utilisant $F_1(\lambda) = 1$ et $L_1(\lambda) = 2\lambda+1$ on obtient bien:
   $2F_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)F_1(\lambda) + L_1(\lambda)F_n(\lambda)$ et $2L_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)L_1(\lambda) + 5F_n(\lambda)F_1(\lambda)$.

8. Démontrons la formule de Moivre pour les entiers négatifs $-n$ par récurrence sur n. D'après (3),(4) et (9), elle est valable pour $-n = -1$. Supposons la vraie pour un entier $-n \leq -1$ et montrons qu'elle est vraie pour $-(n+1)$. Avec (3),(4), (7) et (9):
   $R(\lambda)^{-n-1} = \frac{1}{(\lambda^2+\lambda-1)^{n+1}}(-F_n(\lambda)J + \frac{1}{2}L_n(\lambda)I)(-J + \frac{1}{2}L_1(\lambda)I)$.
   Puis $R(\lambda)^{-n-1} = \frac{1}{(\lambda^2+\lambda-1)^{n+1}}(F_n(\lambda)J^2 - (\frac{1}{2}L_n(\lambda) + \frac{1}{2}L_1(\lambda)F_n(\lambda))J + \frac{1}{4}L_1(\lambda)L_n(\lambda)I)$.
   Avec $J^2 = \frac{5}{4}I$ et (10) on peut remplacer $\frac{1}{2}L_n(\lambda) + \frac{1}{2}L_1(\lambda)F_n(\lambda)$ par $F_{n+1}(\lambda)$ ainsi que $\frac{1}{4}L_1(\lambda)L_n(\lambda) + \frac{5}{4}F_n(\lambda)$ par $\frac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)$.
   On obtient finalement avec (3) et (4): $R(\lambda)^{-n-1} = F_{-n-1}(\lambda)J + \frac{1}{2}L_{-n-1}(\lambda)I$.
   La formule de Moivre est démontrée pour les entiers négatifs.

III Quelques identités remarquables

9. Avec (9), $R(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)R(\lambda)^{-1} = 2J$ donc $R(\lambda)^2 + (1-\lambda-\lambda^2)I = 2JR(\lambda)$.

10. En multipliant cette dernière égalité par $R(\lambda)^{-2}$ on obtient $I - W(\lambda) = 2JR(\lambda)^{-1}$.
    Comme $J^{-1} = \frac{4}{5}J$ et puisque $R(\lambda)$ et J commutent on obtient $(I - W(\lambda))^{-1} = \frac{2}{5}JR(\lambda)$.

11. Avec $(\lambda^2+\lambda-1)^k R(\lambda)^{n-2k} = R(\lambda)^n W(\lambda)^k$ on obtient:
    $S_n = \sum_{k=0}^{n} (\lambda^2+\lambda-1)^k R(\lambda)^{n-2k} = R(\lambda)^n \sum_{k=0}^{n} W(\lambda)^k$.
    Multiplions cette égalité par $(I - W(\lambda))$:
    $(I - W(\lambda))S_n = R(\lambda)^n(I - W(\lambda)^{n+1}) = R(\lambda)^n - (\lambda^2+\lambda-1)^{n+1}R(\lambda)^{-n-2}$ puisque $R(\lambda)$ et $W(\lambda)$ commutent.
    Avec $(I - W(\lambda))^{-1} = \frac{2}{5}JR(\lambda)$, la formule de Moivre et (3) et (4):

$S_n = \dfrac{2}{5}J(R(\lambda)^{n+1} - (\lambda^2+\lambda-1)^{n+1}R(\lambda)^{-n-1}) = \dfrac{2}{5}J(F_{n+1}(\lambda)J + \dfrac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I - (-F_{n+1}(\lambda)J + \dfrac{1}{2}L_{n+1}(\lambda)I))$
donc $S_n = \dfrac{4}{5}F_{n+1}(\lambda)J^2 = F_{n+1}(\lambda)I$.

12. Avec la formule de Moivre appliquée à $R(\lambda)^{n-2k}$ et l'indépendance de I et J on déduit:
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda^2+\lambda-1)^k F_{n-2k}(\lambda) = 0$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda^2+\lambda-1)^k L_{n-2k}(\lambda) = 2F_{n+1}(\lambda)$.

13. En utilisant (2): $\Delta_k(\lambda) = \det\begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & (1+2\lambda)L_{k-1}(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{k-2}(\lambda) \\ L_k(\lambda) & (1+2\lambda)L_k(\lambda) + (1-\lambda-\lambda^2)L_{k-1}(\lambda)\end{pmatrix}$ et par linéarité par rapport la seconde colonne du déterminant:
$\Delta_k(\lambda) = (1-\lambda-\lambda^2)\det\begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & L_{k-2}(\lambda) \\ L_k(\lambda) & L_{k-1}(\lambda)\end{pmatrix} = (\lambda^2+\lambda-1)\Delta_{k-1}(\lambda)$.
La suite $(\Delta_k(\lambda))$ est donc une suite géométrique de raison $(\lambda^2+\lambda-1)$.
Le premier terme vaut $\Delta_1(\lambda) = 2L_2(\lambda) - L_1(\lambda)^2 = 2(3+2\lambda+2\lambda^2) - (1+4\lambda+4\lambda^2) = 5$.
On a donc $\Delta_k(\lambda) = 5(\lambda^2+\lambda-1)^{k-1}$.

14. Pour cette question il faut supposer $L_k(\lambda) \neq 0$.
$L_k(\lambda)^2 P(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}) = (1-\lambda-\lambda^2)L_{k-1}(\lambda)^2 + (1+2\lambda)L_{k-1}(\lambda)L_k(\lambda) - L_k(\lambda)^2$.
Avec (2): $L_k(\lambda)^2 P(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}) = L_{k-1}(\lambda)L_{k+1}(\lambda) - L_k(\lambda)^2 = \Delta_k(\lambda) = 5(\lambda^2+\lambda-1)^{k-1}$.

15. $\dfrac{2}{L_k}JR(0)^k = \dfrac{2}{L_k}J(F_kJ + \dfrac{1}{2}L_kI) = J + \dfrac{2F_k}{L_k}J^2 = J + \dfrac{5F_k}{2L_k}I$.
Mais $5F_k = L_{k-1} + L_{k+1} = 2L_{k-1} + L_k$ donc $\dfrac{2}{L_k}JR(0)^k = J + \left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k} + \dfrac{1}{2}\right)I = R\left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k}\right)$.

16. Par (7) et (12):
$F_{2n}\left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k}\right)J + \dfrac{1}{2}L_{2n}\left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k}\right)I = R\left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k}\right)^{2n} = \dfrac{2^{2n}}{L_k^{2n}}J^{2n}R(0)^{2nk} = \dfrac{5^n}{L_k^{2n}}(F_{2nk}J + \dfrac{1}{2}L_{2nk}I)$.
Puisque (I,J) est une famille libre on obtient $F_{2n}\left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \dfrac{5^n}{L_k^{2n}}F_{2nk}$ et $L_{2n}\left(\dfrac{L_{k-1}}{L_k}\right) = \dfrac{5^n}{L_k^{2n}}L_{2nk}$.

IV Une touche de probabilités

17. Il est clair que $L_n > 0$ pour $n \geqslant 0$. De (4) on déduit que $L_{-n} = (-1)^n L_n$ donc $L_{2k} > 0$ pour tout entier $k < 0$. Par suite on a bien $p_k > 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2n$.
Avec la première formule (14): $2L_{i(2n+1)} = \dfrac{L_i^{2n+1}}{5^n}2F_{2n+1}\left(\dfrac{L_{i-1}}{L_i}\right)$.
Avec la deuxième formule de la question 12:
$2L_{i(2n+1)} = \dfrac{L_i^{2n+1}}{5^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\left(\dfrac{L_{i-1}^2}{L_i^2} + \dfrac{L_{i-1}}{L_i} - 1\right)^k L_{2n-2k}\left(\dfrac{L_{i-1}}{L_i}\right)$.
Avec la deuxième formule (13):
$2L_{i(2n+1)} = \dfrac{L_i^{2n+1}}{5^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\dfrac{(L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2)^k}{L_i^{2k}}\dfrac{5^{n-k}}{L_i^{2(n-k)}}L_{2i(n-k)} = L_i\sum_{k=0}^{2n}(L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2)^k 5^{-k}L_{2i(n-k)}$.
De plus $L_{i-1}^2 + L_{i-1}L_i - L_i^2 = L_{i-1}L_{i+1} - L_i^2 = \Delta_i(0) = 5(-1)^{i-1} = 5$ puisque i est impair.
On obtient $2L_{i(2n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}L_iL_{2i(n-k)}$ d'où $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}p_k = 1$.
Remarque: il y avait une démonstration directe en deux lignes, sans utiliser les questions précédentes mais en utilisant simplement $L_n = a^n + b^n$ avec a et b racines de l'équation $x^2 = x+1$, donc $ab = -1$ (suite linéairement récurrente d'ordre 2):
$\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}a^{2i(n-k)} = a^{2in}\frac{1-a^{-2i(2n+1)}}{1-a^{-2i}} = \frac{a^{i(2n+1)} - a^{-i(2n+1)}}{a^i - a^{-i}} = \frac{L_{i(2n+1)}}{L_i}$ puisque $a^{-i} = -b^i$ et $a^{-i(2n+1)} = -b^{i(2n+1)}$, i étant impair.
Mais a et b sont interchangeables donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}L_{2i(n-k)} = \sum_{k=0}^{2n}a^{2i(n-k)} + \sum_{k=0}^{2n}b^{2i(n-k)} = 2\frac{L_{i(2n+1)}}{L_i}$.