

Mines Ponts II PC 2022

Le théorème matriciel de Kreiss

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, le vecteur colonne $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$; on pose

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

On admet que l'application $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \mapsto \|X\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. On note

$$\Sigma_n = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}); \|X\| = 1\}.$$

On identifie $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C}$. Ainsi, si $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $X^T M Y$ est un nombre complexe.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_M le polynôme caractéristique de M , $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M . Si $1 \leq i, j \leq n$, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient de M situé à la i -ième ligne et à la j -ième colonne. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M)$, on note

$$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1}.$$

Soient

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$$

Les parties 4 et 5 sont indépendantes des parties 1, 2 et 3. Dans la partie 3, les questions 7 à 10 sont indépendantes des questions 5 et 6.

1 Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. Justifier que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'application

$$X \in \Sigma_n \mapsto \|MX\|$$

atteint son maximum, que l'on notera $\|M\|_{\text{op}}$. Établir les deux propriétés

$$\begin{aligned} \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \|M\|_{\text{op}} &= \max \left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|}; X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\} \\ \forall (M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \|M'M\|_{\text{op}} &\leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}. \end{aligned}$$

On admettra dans la suite que l'application $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto \|M\|_{\text{op}}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Si $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, montrer que

$$\max \{|V^T U|; V \in \Sigma_n\} = \|U\|.$$

En déduire que, si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors

$$\max \{|X^T M Y|; (X, Y) \in \Sigma_n \times \Sigma_n\} = \|M\|_{\text{op}}$$

2 L'ensemble $\mathcal{B}_n$

Soit $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que la suite $\left(\|M^k\|_{op}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on pose

$$b(M) = \sup \left\{ \|M^k\|_{op} ; k \in \mathbb{N} \right\}.$$

3. Soient $M \in \mathcal{B}_n, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(\|M^k X\|)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.
Si $\lambda \in \sigma(M)$, si X est un vecteur propre de M associé à λ , exprimer pour $k \in \mathbb{N}$, le vecteur $M^k X$ en fonction de λ, k et X . En déduire que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$.
4. On suppose que $n \geq 2$. Indiquer, avec justification, une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, triangulaire supérieure, telle que $\sigma(M) \subset \mathbb{D}$, mais n'appartenant pas à $\mathcal{B}_n$.

3 Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On dit que l'élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\mathcal{P}$ si, pour tout (i, j) de $\{1, \dots, n\}^2$, il existe un élément $P_{M,i,j}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M), \quad (R_z(M))_{i,j} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)}. \quad (\mathcal{P})$$

5. Montrer que les matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient $\mathcal{P}$.
On commencera par le cas des matrices diagonales.
6. On admet que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $\mathcal{P}$. En déduire que, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$, il existe un élément $P_{M,X,Y}$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M), \quad X^T R_z(M) Y = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}$$

7. Soient $M \in \mathcal{B}_n$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$. Montrer que la série de matrices $\sum \frac{M^j}{z^{j+1}}$ converge.
On admettra le fait suivant : soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie ; si $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E telle que la série $\sum N(v_j)$ converge, alors la série $\sum v_j$ converge dans E .

Si $m \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $(zI_n - M) \sum_{j=0}^m \frac{M^j}{z^{j+1}}$.

En déduire que

$$R_z(M) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{M^j}{z^{j+1}}$$

Pour $M \in \mathcal{B}_n$, on définit la fonction

$$\varphi_M : z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \longmapsto (|z| - 1) \|R_z(M)\|_{op}.$$

8. Déduire de la question précédente l'inégalité

$$(1) \quad \forall M \in \mathcal{B}_n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \quad \varphi_M(z) \leq b(M).$$

Soit $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum c_j$ converge absolument. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}.$$

9. Justifier l'existence et la continuité de la fonction u .

Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) e^{i(k+1)t} dt = c_k$$

10. Soient $M \in \mathcal{B}_n$, $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2$. Déterminer une suite de nombres complexes $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que la série $\sum c_j$ converge absolument et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X^T R_{reit}(M) Y = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j e^{-i(j+1)t}$$

Si $k \in \mathbb{N}$, en déduire, en utilisant la question 9, une expression intégrale de $X^T M^k Y$.

4 Variation totale et norme uniforme

Soit $\mathcal{C}^1$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{C}^1$, on pose

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(t)|; t \in [-\pi, \pi]\} \quad \text{et} \quad V(f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f'|.$$

11. En considérant une suite de fonctions bien choisie, montrer qu'il n'existe pas d'élément C de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1, \quad V(f) \leq C \|f\|_{\infty}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1$ à valeurs réelles. On suppose que l'ensemble $C(f)$ des points de $] -\pi, \pi[$ en lesquels la fonction f' s'annule est fini. On note ℓ le cardinal de $C(f)$ et, si $\ell \geq 1$, on désigne par $t_1 < \dots < t_{\ell}$ les éléments de $C(f)$. On pose $t_0 = -\pi$ et $t_{\ell+1} = \pi$.

12. Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} |f(t_{j+1}) - f(t_j)|.$$

Pour $0 \leq j \leq \ell$, soit ψ_j la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$ égale à 1 sur $[f(t_j), f(t_{j+1})[$ et à 0 sur $\mathbb{R} \setminus [f(t_j), f(t_{j+1})[$. Montrer que

$$V(f) = \sum_{j=0}^{\ell} \int_{-\|f\|_{\infty}}^{\|f\|_{\infty}} \psi_j.$$

13. Si $y \in \mathbb{R}$, montrer que l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini de cardinal majoré par $\ell + 1$; on note $N(y)$ ce cardinal.

Si $y \in \mathbb{R}$, exprimer $N(y)$ en fonction de $\psi_0(y), \dots, \psi_{\ell}(y)$. En déduire l'inégalité

$$(2) \quad V(f) \leq 2 \max\{N(y); y \in \mathbb{R}\} \|f\|_{\infty}.$$

5 L'inégalité de Spijker

On appelle fraction rationnelle tout quotient $F = \frac{P}{Q}$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$. Une telle fraction peut s'écrire sous la forme précédente de façon que P et Q n'aient pas de racine commune dans $\mathbb{C}$; si tel est le cas, les racines de Q dans $\mathbb{C}$ sont, par définition, les pôles de F . On note $\mathcal{R}_n$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $\mathbb{U}$ de la forme $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$.

Soient, dans la suite de cette partie, $F \in \mathcal{R}_n$, P et Q deux éléments de $\mathbb{C}_n[X]$ vérifiant $F = \frac{P}{Q}$ et

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad Q(z) \neq 0.$$

Pour $t \in [-\pi, \pi]$, on pose

$$f(t) = F(e^{it}) = g(t) + ih(t) \text{ où } (g(t), h(t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour $u \in [-\pi, \pi]$, on définit une fonction f_u de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_u(t) = g(t) \cos(u) + h(t) \sin(u) = \operatorname{Re}(e^{-iu} F(e^{it})) = \operatorname{Re}(e^{-iu} f(t)).$$

14. Dans cette question, on fixe $u \in [-\pi, \pi]$ et on suppose que f_u n'est pas constante. On fixe également $y \in \mathbb{R}$. En utilisant éventuellement l'expression de $f_u(t)$ comme partie réelle de $e^{-iu} F(e^{it})$ et la formule d'Euler pour la partie réelle, déterminer $S \in \mathbb{C}_{2n}[X]$ tel que

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \quad f_u(t) = y \iff S(e^{it}) = 0.$$

En déduire que l'ensemble $f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[$ est fini de cardinal majoré par $2n$.

15. En observant que la fonction $|\cos|$ est 2π -périodique, calculer, pour $\omega \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(u - \omega)| du.$$

En déduire que, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |a \cos(u) + b \sin(u)| du = 4\sqrt{a^2 + b^2}.$$

16. Exprimer l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'_u(t)| du \right) dt$$

en fonction de $V(f)$.

17. On admet l'égalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'_u(t)| du \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f'_u(t)| dt \right) du.$$

On admet aussi que, pour $u \in [-\pi, \pi]$ tel que f_u ne soit pas constante, l'ensemble des points de $] -\pi, \pi[$ en lesquels la fonction f'_u s'annule est fini (ce que l'on pourrait établir en raisonnant comme dans la question 14).

En déduire l'inégalité

$$(3) \quad V(f) \leq 2\pi n \|f\|_{\infty}.$$

6 La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

Soit $M \in \mathcal{B}_n$. L'inégalité (1) de la question 8 justifie la définition de

$$b'(M) = \sup \{ \varphi_M(z); z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \}.$$

et entraîne que $b'(M) \leq b(M)$. On se propose de majorer $b(M)$ en fonction de $b'(M)$.

Dans les questions 18 et 19, on fixe $r \in]1, +\infty[$ et $(X, Y) \in \Sigma_n^2$.

Pour $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, on note

$$\mathbb{D}_{\rho} = \{z \in \mathbf{C}; |z| \leq \rho\}$$

18. Montrer qu'il existe un élément F_r de $\mathcal{R}_n$ dont les pôles sont tous dans $\mathbb{D}_{1/r}$ et tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/r}, \quad |F_r(z)| \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it}) e^{i(k+1)t} dt$$

19. En utilisant la question précédente, une intégration par parties et l'inégalité (3) de la question 17, montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| X^T M^k Y \right| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} n b'(M)$$

20. Démontrer finalement l'inégalité

$$(4) \quad b(M) \leq en \, b'(M).$$

Ce résultat de M.N. Spijker (1991) améliore un théorème de H.O. Kreiss (1962). La constante en est asymptotiquement optimale.

FIN DU PROBLÈME