UN CORRIGÉ du SUJET MINES-PONTS, MATH-2-PC, 2022

PARTIE 1. Norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

1. • L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ X & \mapsto & \|X\| \end{cases}$ est continue car elle est 1-lipschitzienne.

L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & MX \end{cases}$ est continue car elle est linéaire en dimension finie.

Par composition, l'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ X & \mapsto & \|MX\| \end{cases}$ est continue.

La sphère-unité Σ_n est une partie fermée bornée de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. *Elle est en effet fermée grâce à la continuité de $X \mapsto \|X\|$ mentionnée ci-dessus.* Du théorème des bornes atteintes, on déduit l'existence de

$$\|M\|_{\text{op}} = \max_{\Sigma_n} f = \max_{X \in \Sigma_n} \|MX\| = \max_{\|X\|=1} \|MX\| .$$

• Si $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, posons $Y = \dfrac{X}{\|X\|}$, alors $Y \in \Sigma_n$ donc $\|MY\| \leq \|M\|_{\text{op}}$.

Mais $MY = \dfrac{MX}{\|X\|}$ donc $\|MY\| = \dfrac{\|MX\|}{\|X\|}$, on a donc $\dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \leq \|M\|_{\text{op}}$.

Ainsi, $\|M\|_{\text{op}}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{ \dfrac{\|MX\|}{\|X\|} \ ; \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}$.

D'autre part, par définition de $\|M\|_{\text{op}}$, il existe $X_0 \in \Sigma_n$ tel que $\|MX_0\| = \|M\|_{\text{op}}$. On a alors $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ et $\dfrac{\|MX_0\|}{\|X_0\|} = \|M\|_{\text{op}}$. Ce majorant est donc atteint, donc

$$\|M\|_{\text{op}} = \max \left\{ \frac{\|MX\|}{\|X\|} \ ; \ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\} .$$

• On a donc $\|MX\| \leq \|M\|_{\text{op}} \|X\|$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Donc

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \qquad \|M'MX\| \leq \|M'\|_{\text{op}} \|MX\| \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}} \|X\| .$$

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, on a donc $\dfrac{\|M'MX\|}{\|X\|} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}$. De la définition d'un maximum, on déduit que $\|M'M\|_{\text{op}} \leq \|M'\|_{\text{op}} \|M\|_{\text{op}}$.

2. • On connaît les produits scalaires et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cadre des espaces préhilbertiens **<u>réels</u>**, on s'y ramène facilement en écrivant que, avec $U = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^T$ et $V = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}^T$ appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$\left|V^T U\right| = \left| \sum_{k=1}^n u_k v_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |u_k| \, |v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|U\| \, \|V\| .$$

Donc, si $V \in \Sigma_n$, on a $\left|V^T U\right| \leq \|U\|$. Puis,

- si $U = 0$, alors clairement $\max \left\{ \left|V^T U\right| \ ; \ V \in \Sigma_n \right\} = 0 = \|U\|$;

- sinon, en choisissant $V_0 = \dfrac{\overline{U}}{\|U\|} \in \Sigma_n$, on a

$$\left|V_0^T U\right| = \frac{\left|\overline{U}^T U\right|}{\|U\|} = \frac{\|U\|^2}{\|U\|} = \|U\| ,$$

le majorant obtenu est donc atteint, donc $\max \left\{ \left|V^T U\right| \ ; \ V \in \Sigma_n \right\} = \|U\|$.

- D'abord, si $(X,Y)\in\Sigma_n^2$, on a $\left|X^T MY\right| \leq \|MY\| \leq \|M\|_{\text{op}}\,\|Y\| = \|M\|_{\text{op}}$. Puis,

  - si $M=0$, l'inégalité demandée est triviale ;

  - sinon, soit $Y_0\in\Sigma_n$ tel que $\|MY_0\| = \|M\|_{\text{op}} > 0$, choisissons $X_0 = \dfrac{\overline{MY_0}}{\|MY_0\|}$, alors $X_0\in\Sigma_n$ et

$$\left|X_0^T MY_0\right| = \left|\frac{(\overline{MY_0})^T\, MY_0}{\|MY_0\|}\right| = \frac{\|MY_0\|^2}{\|MY_0\|} = \|MY_0\| = \|M\|_{\text{op}}\ ,$$

  on conclut donc que $\max\left\{\left|X^T MY\right|\ ;\ (X,Y)\in\Sigma_n\times\Sigma_n\right\} = \|M\|_{\text{op}}$.

  Remarque. Si $(X,Y)\in\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\big)^2$, on a $|X^T MY| \leq \|M\|_{\text{op}}\,\|X\|\,\|Y\|$.

PARTIE 2. L'ensemble $\mathcal{B}_n$

3. • Si $M\in\mathcal{B}_n$ et $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \|M^k X\| \leq \|M^k\|_{\text{op}}\,\|X\| \leq b(M)\,\|X\|\ ,$$

la suite $\big(\|M^k X\|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

- Si $X\neq 0$ et $MX=\lambda X$, classiquement $M^kX=\lambda^kX$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
- Soit $M\in\mathcal{B}_n$, soit $\lambda\in\sigma(M)$, soit X un vecteur propre associé. Alors la suite de terme général $\|M^kX\| = \|\lambda^kX\| = |\lambda|^k\,\|X\|$ doit être bornée, ce qui implique $|\lambda|\leq 1$. On a donc l'inclusion $\sigma(M)\subset\mathbb{D}$.

4. Considérons $M = I_n + E_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & 1 & 0 & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & (0) & & \ddots & 0\\ & & & & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Cette matrice est triangulaire supérieure avec $\sigma(M)=\{1\}\subset\mathbb{D}$. Mais on calcule facilement $M^k = I_n + k\,E_{1,2}$, et en prenant $X=E_2$ (deuxième vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$), on a $M^kX = kE_1+E_2$, donc $\|M^kX\| = \sqrt{k^2+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. La suite $\big(\|M^kE_2\|\big)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on déduit alors de la question **3.** que $M\notin\mathcal{B}_n$.

PARTIE 3. Résolvante d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

5. • Soit $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale, alors $\sigma(M)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ (*non nécessairement distincts*), et $\chi_D = \displaystyle\prod_{k=1}^n (X-\lambda_k)$. Si $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(D)$, alors $zI_n - D$ est inversible et

$$R_z(D) = (zI_n-D)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{z-\lambda_1},\cdots,\frac{1}{z-\lambda_n}\right).$$

On a donc $\big(R_z(D)\big)_{i,j} = 0$ si $i\neq j$, et $\big(R_z(D)\big)_{i,i} = \dfrac{1}{z-\lambda_i} = \dfrac{\displaystyle\prod_{k\neq i}(z-\lambda_k)}{\chi_D(z)}$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. La propriété $\mathcal{P}$ est alors vérifiée avec les polynômes (de degré au plus $n-1$):

$$\begin{cases} P_{D,i,j} = 0 \quad \text{si } i \neq j \\ P_{D,i,i} = \displaystyle\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (X - \lambda_k) \quad \text{pour } i \in [\![1, n]\!] \end{cases} .$$

- Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable, posons $M = QDQ^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors $\chi_M = \chi_D$ et $\sigma(M) = \sigma(D)$.
  Si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M)$, alors $zI_n - M = Q(zI_n - D)Q^{-1}$, puis
  $$R_z(M) = (zI_n - M)^{-1} = Q \cdot R_z(D) \cdot Q^{-1} ,$$
  donc, en utilisant l'étude faite pour une matrice diagonale, pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,
  $$\begin{aligned} \big(R_z(M)\big)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (Q)_{i,k} \big(R_z(D)\big)_{k,l} (Q^{-1})_{l,i} \\ &= \sum_{k,l} (Q)_{i,k} \frac{P_{D,k,l}(z)}{\chi_D(z)} (Q^{-1})_{l,i} = \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)} \end{aligned}$$
  avec $P_{M,i,j} = \displaystyle\sum_{k,l} (Q)_{i,k} (Q^{-1})_{l,i} P_{D,k,l} \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ puisque c'est une combinaison linéaire de polynômes appartenant à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Donc M vérifie $\mathcal{P}$.

6. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(M)$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T$, on a
$$X^T \cdot R_z(M) \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \big(R_z(M)\big)_{i,j} = \sum_{i,j} x_i y_j \frac{P_{M,i,j}(z)}{\chi_M(z)} = \frac{P_{M,X,Y}(z)}{\chi_M(z)}$$
en posant $P_{M,X,Y} = \displaystyle\sum_{i,j} x_i y_j P_{M,i,j}$, polynôme de degré $n - 1$ au plus.

7. • Si $M \in \mathcal{B}_n$, alors $\forall j \in \mathbb{N} \quad \|M^j\|_{\mathrm{op}} \leq b(M)$. On a alors, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, i.e. si $|z| > 1$,
$$\forall j \in \mathbb{N} \qquad \left\| \frac{M^j}{z^{j+1}} \right\|_{\mathrm{op}} = \frac{\|M^j\|_{\mathrm{op}}}{|z|^{j+1}} \leq \frac{b(M)}{|z|^{j+1}} ,$$
terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{|z|} < 1$, donc convergente. Comme $\| \cdot \|_{\mathrm{op}}$ est une norme sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, le résultat admis donne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{j \geq 0} \frac{M^j}{z^{j+1}}$ dans cet espace normé.

• Pour $m \in \mathbb{N}$, par télescopage, on obtient
$$\textbf{(*)} \qquad (zI_n - M) \sum_{j=0}^{m} \frac{M^j}{z^{j+1}} = \sum_{j=0}^{m} \frac{M^j}{z^j} - \sum_{j=1}^{m+1} \frac{M^j}{z^j} = I_n - \frac{M^{m+1}}{z^{m+1}} .$$

• Posons $S=\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{M^j}{z^{j+1}}=\lim_{m\to+\infty}\left(\sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^{j+1}}\right)$.

On a $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{M^{m+1}}{z^{m+1}}=0$ puisque $\displaystyle\left\|\frac{M^{m+1}}{z^{m+1}}\right\|_{\mathrm{op}}\leq\frac{b(M)}{|z|^{m+1}}\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0.$

En passant à la limite $(m\to+\infty)$ dans **(*)**, en utilisant la continuité du produit matriciel, on obtient la relation $(zI_n-M)\,S=I_n$, soit

$$S=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{M^j}{z^{j+1}}=(zI_n-M)^{-1}=R_z(M)\ .$$

8. Soit $M\in\mathcal{B}_n$, soit $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$. Pour tout $m\in\mathbb{N}$, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}\frac{M^j}{z^{j+1}}\right\|_{\mathrm{op}}\leq\sum_{j=0}^{m}\frac{\|M^j\|_{\mathrm{op}}}{|z|^{j+1}}\leq b(M)\ \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{|z|^{j+1}}\ .$$

En faisant tendre m vers l'infini, on déduit

$$\big\|R_z(M)\big\|_{\mathrm{op}}\leq b(M)\ \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{|z|^{j+1}}=\frac{b(M)}{|z|-1}\ ,$$

donc $\varphi_M(z)=\big(|z|-1\big)\ \big\|R_z(M)\big\|_{\mathrm{op}}\leq b(M)$.

9. • Posons $u_j(t)=c_j\ e^{-i(j+1)t}$ pour tout j entier naturel. Chaque fonction u_j est continue sur $\mathbb{R}$ et $\|u_j\|_\infty=|c_j|$, donc la série $\sum\|u_j\|_\infty$ converge, il y a donc convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_j$, ce qui entraîne la continuité de la somme u.

• On a alors

$$\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\ e^{i(k+1)t}\ \mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty}c_j\ e^{i(k-j)t}\ \mathrm{d}t=\sum_{j=0}^{+\infty}c_j\ \int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-j)t}\ \mathrm{d}t$$

puisque, $k\in\mathbb{N}$ étant fixé, la série de fonctions $\sum v_j$ avec $v_j(t)=c_j\ e^{i(k-j)t}$ converge normalement sur le segment $[-\pi,\pi]$, ce qui autorise l'intégration terme à terme.

Comme $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(k-j)t}\ \mathrm{d}t=2\pi\ \delta_{j,k}$ (symbole de Kronecker), on déduit que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t)\ e^{i(k+1)t}\ \mathrm{d}t=c_k\ .$$

10. • Comme $re^{it}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}$, on a $\displaystyle R_{re^{it}}(M)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-i(j+1)t}}{r^{j+1}}\ M^j$ d'après la question **7.**

Donc (*en travaillant sur une somme partielle, puis en passant à la limite en utilisant la continuité du produit matriciel*),

$$X^T\cdot R_{re^{it}}(M)\cdot Y=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{e^{-i(j+1)t}}{r^{j+1}}\ X^TM^jY=\sum_{j=0}^{+\infty}c_j\ e^{-i(j+1)t}\ ,$$

en posant $c_j = \dfrac{X^T M^j Y}{r^{j+1}}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. La majoration $|c_j| \leq b(M)\, \dfrac{\|X\|\,\|Y\|}{r^{j+1}}$ montre que la série $\sum c_j$ est absolument convergente.

- De **Q9.**, on déduit que

$$X^T M^k Y = r^{k+1}\, c_k = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+1)t}\, X^T \cdot R_{re^{it}}(M) \cdot Y \,\mathrm{d}t\ .$$

PARTIE 4. Variation totale et norme uniforme

11. Posons $f_n(x) = e^{inx}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-\pi, \pi]$. Alors $f_n \in \mathcal{C}^1$, $\|f_n\|_\infty = 1$ et

$$\frac{V(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = V(f_n) = \int_{-\pi}^{\pi} n \,\mathrm{d}x = 2\pi n \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty\ ,$$

donc le rapport $\dfrac{V(f)}{\|f\|_\infty}$, pour $f \in \mathcal{C}^1 \setminus \{0\}$, n'est pas majoré. Une telle constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ n'existe donc pas.

12. • Par la relation de Chasles, $V(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \big|f'(t)\big| \,\mathrm{d}t$.

Or, f' étant continue, elle garde un signe constant (au sens large) sur chaque segment $[t_j, t_{j+1}]$.Donc

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \big|f'(t)\big| \,\mathrm{d}t = \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) \,\mathrm{d}t \right| = \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big|\ .$$

On en déduit que $V(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big|$.

- Soit $j \in [\![0, l]\!]$.

  \- Si $f' > 0$ sur $]t_j, t_{j+1}[$, alors f est strictement croissante sur $[t_j, t_{j+1}]$, ce qui entraîne que $-\|f\|_\infty \leq f(t_j) < f(t_{j+1}) \leq \|f\|_\infty$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j = \int_{-\|f\|_\infty}^{f(t_j)} \psi_j + \int_{f(t_j)}^{f(t_{j+1})} \psi_j + \int_{f(t_{j+1})}^{\|f\|_\infty} \psi_j = 0 + \big(f(t_{j+1}) - f(t_j)\big) + 0 = \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big|\ .$$

  \- Si $f' < 0$ sur $]t_j, t_{j+1}[$, alors f est strictement décroissante sur $[t_j, t_{j+1}]$, ce qui entraîne que $-\|f\|_\infty \leq f(t_{j+1}) < f(t_j) \leq \|f\|_\infty$. Par la relation de Chasles,

$$\int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j = \int_{-\|f\|_\infty}^{f(t_{j+1})} \psi_j + \int_{f(t_{j+1})}^{f(t_j)} \psi_j + \int_{f(t_j)}^{\|f\|_\infty} \psi_j = 0 + \big(f(t_j) - f(t_{j+1})\big) + 0 = \big|f(t_{j+1}) - f(t_j)\big|\ .$$

On en déduit que $V(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{l} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j$.

13. • La fonction f est strictement monotone sur chaque intervalle $[t_j, t_{j+1}[$ avec $0 \leq j \leq l$ (*cela a déjà été mentionné à la question précédente*), donc f est injective sur chacun de ces intervalles, et le réel y a donc au plus un antécédent par f dans chacun de ces intervalles.

Comme $\displaystyle\bigsqcup_{j=0}^{l} [t_j, t_{j+1}[= [-\pi, \pi[$ et qu'il y a $l+1$ intervalles, on déduit que

$$N(y) = \mathrm{Card}\Big(f^{-1}\big(\{y\}\big) \cap [-\pi, \pi[\Big) \leq l+1 \ .$$

• Comme f est continue et strictement monotone sur $[t_j, t_{j+1}[$, on a

$$f\big([t_j, t_{j+1}[\big) = \big[f(t_j), f(t_{j+1})\big[\quad \text{ou} \quad \big]f(t_{j+1}), f(t_j)\big] \ ,$$

et le réel y admet un antécédent par f dans cet intervalle si et seulement si $\psi_j(y) = 1$. Donc

$$N(y) = \sum_{j=0}^{l} \psi_j(y) \ .$$

• La fonction N est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (comme somme des fonctions ψ_j qui sont des fonctions indicatrices d'intervalles) et, par linéarité de l'intégrale,

$$V(f) = \sum_{j=0}^{l} \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \psi_j(y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} \Big(\sum_{j=0}^{l} \psi_j(y)\Big)\, \mathrm{d}y = \int_{-\|f\|_\infty}^{\|f\|_\infty} N(y)\, \mathrm{d}y \ .$$

On en déduit que $V(f) \leq 2\, \|f\|_\infty \cdot \max\big\{N(y) \ ; \ y \in \mathbb{R}\big\}$.

PARTIE 5. L'inégalité de Spijker

14. • On a les équivalences

$$\begin{aligned} f_u(t) = y \quad & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(e^{-iu}\, \frac{P(e^{it})}{Q(e^{it})}\right) = y \\ & \Longleftrightarrow \quad e^{-iu}\, \frac{P(e^{it})}{Q(e^{it})} + e^{iu}\, \frac{\overline{P(e^{it})}}{\overline{Q(e^{it})}} = 2y \\ & \Longleftrightarrow \quad e^{-iu}\, P(e^{it})\, \overline{Q(e^{it})} + e^{iu}\, \overline{P(e^{it})}\, Q(e^{it}) - 2y\, Q(e^{it})\, \overline{Q(e^{it})} = 0 \quad \textbf{(**)} \ . \end{aligned}$$

Pour tout polynôme $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}_n[X]$, on a, pour t réel,

$$\overline{A(e^{it})} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, e^{-ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, e^{i(n-k)t} = e^{-int}\, \widetilde{A}(e^{it})$$

en posant $\widetilde{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\, X^{n-k} \in \mathbb{C}_n[X]$. En multipliant **(**)** par e^{int}, on obtient

$$\begin{aligned} f_u(t) = y \quad & \Longleftrightarrow \quad e^{-iu}\, P(e^{it})\, \widetilde{Q}(e^{it}) + e^{iu}\, \widetilde{P}(e^{it})\, Q(e^{it}) - 2y\, Q(e^{it})\, \widetilde{Q}(e^{it}) = 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad S(e^{it}) = 0 \end{aligned}$$

avec $S = e^{-iu}\, P\, \widetilde{Q} + e^{iu}\, \widetilde{P}\, Q - 2y\, Q\, \widetilde{Q} \in \mathbb{C}_{2n}[X]$.

- Si f_u n'est pas constante, alors S n'est pas le polynôme nul, il admet alors au plus $2n$ racines complexes. L'application $t \mapsto e^{it}$ étant injective sur $[-\pi, \pi[$, il y a alors au plus $2n$ réels t dans cet intervalle vérifiant $S(e^{it}) = 0$. Donc

$$\text{Card}\left(f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[\right) \leq 2n\,.$$

15. • Comme la fonction $|\cos|$ est 2π-périodique, son intégrale est la même sur tout segment de longueur 2π donc, en terminant par de faciles considérations de signe et de symétrie,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos(u-\omega)\right| \mathrm{d}u = \int_{-\pi-\omega}^{\pi-\omega} \left|\cos(t)\right| \mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\cos(t)\right| \mathrm{d}t = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, \mathrm{d}t = 4\,.$$

- Si $(a, b) = (0, 0)$, la relation demandée est triviale. Sinon, $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un réel ω tel que $\cos(\omega) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin(\omega) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|a\, \cos(u) + b\, \sin(u)\right| \mathrm{d}u &= \sqrt{a^2+b^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos(u)\, \cos(\omega) + \sin(u)\, \sin(\omega)\right| \mathrm{d}u \\
&= \sqrt{a^2+b^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos(u-\omega)\right| \mathrm{d}u \;=\; 4\, \sqrt{a^2+b^2}\,.
\end{aligned}$$

16. On a $f_u'(t) = g'(t)\, \cos(u) + h'(t)\, \sin(u)$. De la question précédente, on déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_u'(t)\right| \mathrm{d}u = 4\, \sqrt{g'(t)^2 + h'(t)^2} = 4\, \left|f'(t)\right|\,.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_u'(t)\right| \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}t = 4 \int_{-\pi}^{\pi} \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t = 4\, V(f)$.

17. Donc, en utilisant le théorème de Fubini admis (interversion d'intégrales):

$$V(f) = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|f_u'(t)\right| \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi} V(f_u)\, \mathrm{d}u\,.$$

Or pour tout $u \in [-\pi, \pi]$, $f_u \in \mathcal{C}^1$ et est à valeurs réelles. Si f_u n'est pas constante, alors on admet que l'ensemble des zéros de f_u' dans $]-\pi, \pi[$ est fini, et il résulte alors de la question **13.** que

$$V(f_u) \leq 2\, \|f_u\|_\infty \cdot \max_{y \in \mathbb{R}} N_u(y)$$

en posant $N_u(y) = \text{Card}\left(f_u^{-1}(\{y\}) \cap [-\pi, \pi[\right)$. Donc, par la question **14.**, on déduit

$$\textbf{(***)} \qquad V(f_u) \leq 4n\, \|f_u\|_\infty\,.$$

L'inégalité **(***)** est par ailleurs immédiate si f_u est constante puisqu'alors $V(f_u) = 0$.

D'autre part, $\left|f_u(t)\right| = \left|\text{Re}\left(e^{-iu} f(t)\right)\right| \leq \left|e^{-iu} f(t)\right| = \left|f(t)\right|$, donc $\|f_u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

Finalement, $V(f) = \dfrac{1}{4} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} V(f_u)\, \mathrm{d}u \leq \dfrac{1}{4} \times 2\pi \times 4n\, \|f\|_\infty = 2\pi\, n\, \|f\|_\infty$.

PARTIE 6. La version de Spijker du théorème matriciel de Kreiss

18. Posons $F_r(z) = X^T \cdot R_{rz}(M) \cdot Y$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$, i.e. lorsque $|rz| > 1$. La question **6.** montre que $F_r(z) = \dfrac{P_{M,X,Y}(rz)}{\chi_M(rz)}$. Les polynômes $P_{M,X,Y}(rZ)$ et $\chi_M(rZ)$, *en appelant ici Z l'indéterminée pour éviter un conflit de notations*, sont de degré au plus n et, si $|z| = 1$, alors $|rz| = r > 1$ donc $rz \notin \sigma(M)$ d'après **Q3.** donc $\chi_M(rz) \neq 0$. La fraction rationnelleF_r n'a donc pas de pôle de module 1, donc $F_r \in \mathcal{R}_n$.

En fait, si $\chi_M(rz) = 0$ alors $|rz| \leq 1$ d'après **Q3.** donc $z \in \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$. Les pôles de la fraction rationnelle F_r sont donc dans le disque fermé $\mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$.

D'après **Q10.**, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad X^T M^k Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(e^{it})\, e^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t\ .$$

Enfin, si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{\frac{1}{r}}$, alors $rz \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ et

$$\big|F_r(z)\big| = \big|X^T \cdot R_{rz}(M) \cdot Y\big| \leq \big\|R_{rz}(M)\big\|_{\mathrm{op}} = \frac{\varphi_M(rz)}{|rz| - 1} \leq \frac{b'(M)}{r|z| - 1}\ .$$

19. Comme dans la **PARTIE 5**, posons $f(t) = F_r(e^{it})$, alors $f \in \mathcal{C}^1$ et, par une intégration par parties,

$$X^T M Y = \frac{r^{k+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t = \frac{i\, r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, e^{i(k+1)t}\, \mathrm{d}t$$

(*je n'ai pas explicité le "terme entre crochets", mais il est nul*). Donc

$$|X^T M Y| \leq \frac{r^{k+1}}{2\pi(k+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f'(t)\big|\, \mathrm{d}t = \frac{r^{k+1}\, V(f)}{2\pi(k+1)}\ .$$

L'inégalité **(3)** de la question **17.** donne alors $|X^T M Y| \leq \dfrac{r^{k+1}}{k+1}\, n\, \|f\|_\infty$.

Enfin, de la majoration de **Q18.** avec $z = e^{it}$, on déduit $\|f\|_\infty \leq \dfrac{b'(M)}{r-1}$. Finalement,

$$|X^T M Y| \leq \frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}\, n\, b'(M)\ .$$

20. Si $M \in \mathcal{B}_n$ et $k \in \mathbb{N}$, il résulte de **Q19.** que

$$|X^T M Y| \leq n \cdot b'(M) \cdot \inf_{r>1} \left(\frac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)} \right)\ .$$

Posons $h_k(r) = \dfrac{r^{k+1}}{(k+1)(r-1)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \,]1, +\infty[\,$.

- pour $k = 0$, $h_0(r) = \dfrac{r}{r-1}$, et on a clairement $\inf\limits_{r>1} h_0(r) = 1 \leq e$;
- si $k \in \mathbb{N}^*$, une étude de variations montre que $\min\limits_{r>1} h_k(r) = h_k\Big(1 + \dfrac{1}{k}\Big) = \Big(1 + \dfrac{1}{k}\Big)^k \leq e$.

Donc $|X^T M^k Y| \leq e\, n\, b'(M)$ pour tout k entier naturel. De **Q2.**, on déduit alors que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \|M^k\|_{\mathrm{op}} \leq e\, n\, b'(M)\ .$$

De la définition de $b(M)$, on déduit enfin que $b(M) \leq e\, n\, b'(M)$.