CORRIGÉ de l'ÉPREUVE de MATHÉMATIQUES
MATH 2 - PC MINES-PONTS 2021

Log-concavité des suites.

1. Posons $b_k = \binom{n}{k}$ avec $0 \leq k \leq n$. Alors $b_k > 0$ et, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{b_k^2}{b_{k-1}\, b_{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}} = \frac{(n!)^2}{(k!)^2\left((n-k)!\right)^2}\ \frac{(k-1)!\,(k+1)!\,(n-k-1)!\,(n-k+1)!}{(n!)^2}$$

$$= \frac{k+1}{k} \times \frac{n-k+1}{n-k} \geq 1$$

car chacun des deux rapports est plus grand que 1, donc $b_k^2 \geq b_{k-1}b_{k+1}$. La suite $(b_k)_{0\leq k\leq n}$ est log-concave.

2. Si (a_k) est ultra log-concave, alors $\left(\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{0\leq k\leq n}$ est log-concave, donc si $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\ \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \leq \frac{a_k^2}{\binom{n}{k}^2}\ , \quad \text{donc} \quad a_{k-1}a_{k+1} \leq \frac{\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}^2}\, a_k^2 \leq a_k^2$$

puisque $a_k^2 \geq 0$ et en utilisant la question précédente. Donc (a_k) est log-concave.

3. Soit $(a_k)_{0\leq k\leq n}$ strictement positive et log-concave. Soit $j \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_j = \max\limits_{0\leq k\leq n} a_k$.

Si $j \geq 1$, alors $a_{j-1} \leq a_j$ puis, si $j \geq 2$, de la log-concavité, on déduit

$$a_{j-2} \leq \frac{a_{j-1}^2}{a_j} = \frac{a_{j-1}}{a_j}\, a_{j-1} \leq a_{j-1}$$

puis, de proche en proche, $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{j-1} \leq a_j$.

De même, si $j \leq n-1$, alors $a_{j+1} \leq a_j$ puis, si $j \leq n-2$, de la log-concavité, on déduit

$$a_{j+2} \leq \frac{a_{j+1}^2}{a_j} = \frac{a_{j+1}}{a_j}\, a_{j+1} \leq a_{j+1}$$

puis, de proche en proche, $a_j \geq a_{j+1} \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n$.

Donc la suite (a_n) est unimodulaire.

Polynômes réels à racines toutes réelles.

4. On a $\deg(P) = n$, donc $\deg(P') = n-1$. De plus, P admet n racines réelles comptées avec leurs multiplicités. Notons $z_1 < z_2 < \cdots < z_k$ les racines réelles **distinctes** de P, rangées dans l'ordre croissant, soient $m_1, \cdots, m_k$ leurs multiplicités respectives.

On sait alors que, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, si $m_i \geq 2$ le réel z_i est racine de P' avec la multiplicité $m_i - 1$ (et si $m_i = 1$ il n'est pas racine de P', que nous compterons donc "avec une multiplicité nulle"). Il y a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(m_i - 1) = n - k$ racines de P' (comptées avec multiplicité) parmi les nombres z_i, $1 \leq i \leq k$.

D'autre part, il résulte du théorème de Rolle que, pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, le polynôme P' admet au moins une racine dans l'intervalle ouvert $]z_i, z_{i+1}[$.

En tenant compte des multiplicités, nous avons déjà trouvé $(n-k)+(k-1) = n-1 = \deg(P')$ racines réelles du polynôme P', ce polynôme est donc "à racines toutes réelles", i.e. il est "scindé sur $\mathbb{R}$" (ces deux expressions sont en effet équivalentes en vertu du théorème de d'Alembert-Gauss).

5. Notons r la "valuation" du polynôme P, i.e. la multiplicité de la racine 0, alors $0 \le r \le n$. On peut alors écrire $P = c\,X^r \displaystyle\prod_{i=1}^{n-r}(X - z_i)$, où $c \in \mathbb{R}^*$ est le coefficient dominant de P, et $z_1, \cdots, z_{n-r}$ sont les racines (réelles par hypothèse) **non nulles** de P comptées avec leur multiplicité, donc non nécessairement distinctes. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$Q(x) = x^n\,P\Big(\frac{1}{x}\Big) = c\,x^{n-r}\prod_{i=1}^{n-r}\Big(\frac{1}{x} - z_i\Big) = c\prod_{i=1}^{n-r}(1 - z_i x)\ .$$

Le polynôme $Q = c\displaystyle\prod_{i=1}^{n-r}(1 - z_i\,X)$ est de degré $n-r$, et il s'écrit comme produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{R}[X]$, il est donc scindé sur $\mathbb{R}$, i.e. à racines toutes réelles.

6. Le polynôme Q_1 est scindé sur $\mathbb{R}$ d'après la question **4.** et il est de degré $n - k + 1$. Ensuite, d'après **Q5.**, le polynôme Q_2 est scindé sur $\mathbb{R}$ et de degré au plus $n-k+1$. Enfin, par **Q4.**, le polynôme Q est scindé sur $\mathbb{R}$, de degré au plus 2.

Par ailleurs, partant de $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, on obtient successivement

$$Q_1 = \sum_{j=k-1}^{n}\frac{j!}{(j-k+1)!}a_j X^{j-k+1} = \sum_{i=0}^{n-k+1}\frac{(i+k-1)!}{i!}\,a_{i+k-1}\,X^i\ ,$$

puis $Q_2 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k+1}\frac{(i+k-1)!}{i!}\,a_{i+k-1}\,X^{n-k+1-i}$, et enfin

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=0}^{2} a_{i+k-1}\,\frac{(i+k-1)!}{i!}\,\frac{(n-k+1-i)!}{(2-i)!}\,X^{2-i} \\ &= a_{k-1}\,\frac{(k-1)!(n-k+1)!}{2}\,X^2 + a_k\,k!(n-k)!\,X + a_{k+1}\,\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2}\ . \end{aligned}$$

Ce trinôme a deux racines réelles (distinctes ou confondues), son discriminant Δ est donc positif ou nul, soit

$$\Delta = a_k^2\,(k!)^2\,\big((n-k)!\big)^2 - a_{k-1}\,a_{k+1}\,(k-1)!\,(n-k+1)!\,(k+1)!\,(n-k-1)! \ge 0$$

et, en divisant par $(n!)^2$, on obtient

$$\frac{a_k^2}{\binom{n}{k}^2} \ge \frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}}\,\frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}\ ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Si $\alpha = 0$, c'est la question **4.**

Supposons désormais $\alpha \neq 0$. Posons $Q(x) = e^{\alpha x} D\big(e^{-\alpha x} P(x)\big)$, alors $Q(x) = P'(x) - \alpha P(x)$, donc Q est un polynôme de degré n. Notons que, si un réel z est racine de P avec la multiplicité m, on a alors $P(z) = P'(z) = \cdots = P^{(m-1)}(z) = 0$ et $P^{(m)}(z) \neq 0$, d'où on déduit facilement que $Q(z) = Q'(z) = \cdots = Q^{(m-2)}(z) = 0$ et $Q^{(m-1)}(z) \neq 0$, donc z est racine de Q avec la multiplicité $m-1$.

Comme en **Q4.**, notons $z_1 < z_2 < \cdots < z_k$ les racines **distinctes** de P, et $m_1, \cdots, m_k$ leurs multiplicités. Comme chaque z_i est racine de Q avec la multiplicité $m_i - 1$, cela nous donne $\sum_{i=1}^{k}(m_i - 1) = n - k$ racines de Q parmi les z_i, en prenant en compte les multiplicités. Enfin, pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, comme $f : x \mapsto e^{-\alpha x} P(x)$ s'annule en z_i et en z_{i+1}, le théorème de Rolle affirme l'existence d'au moins une racine c_i de f', donc de Q, dans l'intervalle ouvert $]z_i, z_{i+1}[$. Cela nous donne donc $(n-k) + (k-1) = n-1$ racines réelles de Q, en tenant compte des multiplicités.

Le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ est de degré n, et ce qui précède montre qu'on peut le factoriser par un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n-1$ et scindé sur $\mathbb{R}$. Le quotient exact S de Q par R est alors un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1, donc $Q = RS$ est scindé sur $\mathbb{R}$, i.e. à racines toutes réelles (c'est un produit de n facteurs du premier degré).

Remarque. Après avoir démontré que Q admet au moins $n-1$ racines réelles comptées avec leurs multiplicités, on peut aussi partir à la recherche de la racine manquante à l'aide d'une extension à l'infini du théorème de Rolle, c'est ce que semble suggérer l'indication fournie par l'énoncé. On a, en effet, le résultat suivant, dont la démonstration est laissée à l'improbable lecteur:

Lemme. Soit $f : [z, +\infty[\to \mathbb{R}$ **avec** z **réel, continue sur** $[z, +\infty[$ **et dérivable sur** $]z, +\infty[$**. Si** $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(z)$**, alors** $\exists c \in]z, +\infty[\ \ f'(c) = 0$.

Voici comment utiliser ce lemme: posons toujours $f(x) = e^{-\alpha x} P(x)$. Si $\alpha > 0$, alors par croissances comparées, on a $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = f(z_k)$, donc il existe $c \in]z_k, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$ donc $Q(c) = 0$. Dans le cas $\alpha < 0$, on obtient l'existence de $c \in]-\infty, z_1[$ tel que $f'(c) = 0$ donc $Q(c) = 0$.

8. Supposons $\deg(Q) = m$, i.e. $b_m \neq 0$. Alors $Q = b_m \prod_{k=1}^{m}(X - q_k)$, où $q_1, \cdots, q_m$ sont les racines (réelles) de Q, comptées avec leurs multiplicités. On a alors, en notant Id l'endomorphisme identité de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$,

$$Q(D) = b_m\,(D - q_m\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (D - q_1\,\mathrm{Id})\ .$$

On notera toutefois que, les polynômes d'endomorphismes et de matrices ne figurant pas au programme de la filière PC, ceci peut difficilement être considéré comme une évidence pour les candidats à cette épreuve!

Posons alors $P_0 = P$, $P_1 = (D - q_1\,\mathrm{Id})(P_0)$ et, pour tout $k \in [\![1, m]\!]$,

$$P_k = (D - q_k\,\mathrm{Id})(P_{k-1}) = (D - q_k\,\mathrm{Id}) \circ \cdots \circ (D - q_1\,\mathrm{Id})(P_0)\ .$$

On a donc $P_1 = P_0' - q_1 P_0$, $P_2 = P_1' - q_2 P_1$, $\cdots$, $P_m = P_{m-1}' - q_m P_{m-1}$. Il résulte de la question **7.** ci-dessus que, si P_k est à racines toutes réelles, alors P_{k+1} l'est aussi. Comme P_0 est à racines toutes réelles et que $Q(D)(P) = b_m P_m$, on conclut que le polynôme $Q(D)(P)$ est à racines toutes réelles.

Quelques exemples.

9. D'après le théorème spectral, la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, son polynôme caractéristique χ_A est donc scindé sur $\mathbb{R}$.

10. Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A, soit la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On sait qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1} = PDP^T$. Posons alors $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$ et $C = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$. Il est clair que C est symétrique et que $C^2 = A$.

11. Il devrait être précisé que B est symétrique **réelle**.

Si les valeurs propres de A, i.e. les racines de χ_A, étaient supposées **strictement** positives, cette question aurait été plus abordable. En effet, dans ce cas, la matrice A ainsi que la matrice C de la question précédente seraient inversibles, donc $AB = C^2 B = C(CBC)C^{-1}$ serait semblable à CBC, donc $\chi_{AB} = \chi_{CBC}$. Et comme CBC est symétrique réelle, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.

Voici une preuve dans le cas général: soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de la matrice $AB = C^2 B$. Alors:

- si $\lambda = 0$, alors λ est réel donc c'est terminé ;

- si $\lambda \neq 0$, soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé, on a donc $ABX = \lambda X$, puis $CBABX = \lambda CBX$, soit $CBCCBX = \lambda CBX$. Posons $Y = CBX$. Ce vecteur de $\mathbb{C}^n$ est non nul (car s'il était nul, on déduirait $CY = \lambda X = 0$, ce qui est impossible puisque le scalaire λ et le vecteur X sont tous les deux non nuls), et $CBCY = \lambda Y$. On en déduit que λ est valeur propre de la matrice symétrique réelle CBC, donc λ est réel.

12. Si P et Q sont des polynômes, alors par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\, P(x)\, Q(x)\, e^{-x} = 0$ d'où la convergence de l'intégrale proposée. La bilinéarité et la symétrie de φ sont immédiates. Ensuite, $\varphi(P, P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \geq 0$ (par positivité de l'intégrale), et comme $x \mapsto P(x)^2\, e^{-x}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, on a $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si cette dernière fonction est nulle, i.e. si et seulement si $P = 0$ (le polynôme P a alors une infinité de racines). On a donc prouvé le caractère défini positif de φ, qui est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

13. En orthonormalisant par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots)$ qui est la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, on obtient une famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes qui est orthonormale pour le produit scalaire φ, on a donc $\varphi(L_i, L_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, et d'autre part on sait que, pour tout i, on a $\mathrm{Vect}(L_0, \cdots, L_i) = \mathrm{Vect}(1, X, \cdots, X^i) = \mathbb{R}_i[X]$ ce qui entraîne que $\deg(L_i) \leq i$. Enfin, si pour un i donné, on avait $\deg(L_i) < i$, alors la famille $(L_0, \cdots, L_i)$ serait liée puisqu'elle serait constituée de $i + 1$ polynômes dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{i-1}[X]$ de dimension i. On a donc $\deg(L_i) = i$ pour tout i entier naturel.

Remarque. Sans imposer de condition supplémentaire, comme par exemple $\varphi(L_i, X^i) > 0$ pour tout i, la famille (L_n) n'est pas unique.

14. Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons $n \geq 2$, supposons que L_n admette une racine complexe non réelle z, on peut alors écrire

$$L_n = (X - z)(X - \overline{z})\, Q = \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\, X + |z|^2\right) Q\ ,$$

avec Q de degré $n - 2$ exactement. Comme $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] = \mathrm{Vect}(L_0, \cdots, L_{n-2})$, on a

$$0 = \varphi(L_n, Q) = \int_0^{+\infty} Q(x)^2 \left(x^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)\, x + |z|^2\right) e^{-x}\, \mathrm{d}x\ ,$$

et comme l'intégrande est continu et positif, le trinôme sans racine réelle étant strictement positif, cela entraîne la nullité de $Q(x)$ pour tout $x \geq 0$, donc la nullité du polynôme Q, ce qui est absurde. Donc le polynôme L_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

15. Supposons $b_i \in]0, 1[$ pour tout i. On a $B(\Omega) = [\![0, n]\!]$, on reconnaît alors

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(B = k)\, x^k = G_B(x)$$

(série génératrice de la variable B). Comme $B = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_i$ et que les B_i sont mutuellement indépendantes, on a $G_B = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} G_{B_i}$ (*c'est au programme dans le cas de* **deux** *variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$*, il me semble qu'aller au-delà nécessite de passer par un lemme des coalitions qui n'est pas au programme non plus...*), donc

$$P = \prod_{i=1}^{n} \big((1 - b_i) + b_i X\big)$$

est un polynôme à racines toutes réelles.

16. Je supposerai d'abord que $p_n > 0$ et que $p_0 > 0$, *cf.* remarque 1 plus bas.

Notons z_1, $\cdots$, z_n les racines (réelles, mais non nécessairement distinctes) de P, elles sont strictement négatives puisque $P(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. On a alors la factorisation

$$P = p_n \prod_{i=1}^{n} (X - z_i)\ .$$

Par analogie avec la question précédente, on aimerait mettre P sous la forme

$$P = \prod_{i=1}^{n} \big((1 - b_i) + b_i X\big) = \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(X - \frac{b_i - 1}{b_i}\right)\ , \qquad \text{(*)}$$

où les b_i sont des réels appartenant à $]0, 1[$. L'équation $\dfrac{b_i - 1}{b_i} = z_i$ se résout en $b_i = \dfrac{1}{1 - z_i}$. Comme $z_i < 0$ pour tout i, on a bien $\dfrac{1}{1 - z_i} \in]0, 1[$. En posant donc $b_i = \dfrac{1}{1 - z_i}$, on a enfin

$$\prod_{i=1}^{n} b_i = \frac{1}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1 - z_i)} = \frac{p_n}{P(1)} = p_n$$

puisqu'on a supposé $P(1) = \sum_{k=0}^{n} p_k = 1$. Le polynôme P s'écrit donc bien sous la forme **(*)** avec les $b_i = \dfrac{1}{1 - z_i}$ dans $]0, 1[$, c'est donc la fonction génératrice d'une variable aléatoire B qui s'écrirait comme somme de n variables indépendantes B_i avec $B_i \hookrightarrow \mathcal{B}(b_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Remarque 1. Si $\deg(P) = m < n$, on obtient ainsi m variables de Bernoulli indépendantes et on complète par $n-m$ variables constantes nulles. Si la valuation de P, i.e. la multiplicité de la racine 0, est $r > 0$, on écrit $P = X^r Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(0) \neq 0$, on obtient par le raisonnement ci-dessus $n - r$ variables de Bernoulli indépendantes B_i, $1 \leq i \leq n - r$, telles que $Q = G_B$ avec $B = \sum_{i=1}^{n-r} B_i$, et on complète par r variables constantes de valeur 1 pour former une variable aléatoire somme dont la fonction génératrice est le polynôme P.

Remarque 2. L'existence des variables B_i indépendantes me semble toutefois dépendre de l'espace probabilisé choisi.

Théorème de Hermite-Sylvester.

17. Notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons e_i^* la i-ième forme linéaire coordonnée sur $\mathbb{C}^n$, i.e. l'application $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$. On a alors $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on en déduit facilement que la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est libre dans l'espace vectoriel $(\mathbb{C}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ des formes linéaires sur $\mathbb{C}^n$. Puis $\mathrm{Card}(\mathcal{B}^*) = n = \dim\big((\mathbb{C}^n)^*\big)$, donc $\mathcal{B}^*$ est une base de $(\mathbb{C}^n)^*$.

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, on a $\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} e_i^*$ et, pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, on a $\psi_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_k^{i-1} e_i^*$ et $\overline{\psi}_k = \sum_{i=1}^{n} \overline{\beta}_k^{i-1} e_i^*$. Soit la famille $\mathcal{F} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_r, \psi_1, \overline{\psi}_1, \cdots, \psi_s, \overline{\psi}_s)$, c'est une famille de $q = r + 2s$ vecteurs de $(\mathbb{C}^n)^*$, et sa matrice dans la base $\mathcal{B}^*$ est

$$V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_r & \beta_1 & \overline{\beta}_1 & \cdots & \beta_s & \overline{\beta}_s \\ \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_r^2 & \beta_1^2 & \overline{\beta}_1^2 & \cdots & \beta_s^2 & \overline{\beta}_s^2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_r^{n-1} & \beta_1^{n-1} & \overline{\beta}_1^{n-1} & \cdots & \beta_s^{n-1} & \overline{\beta}_s^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C}) .$$

Les nombres complexes α_1, $\cdots$, α_r, β_1, $\overline{\beta}_1$, $\cdots$, β_s, $\overline{\beta}_s$ étant deux à deux distincts, les q colonnes de cette matrice sont linéairement indépendantes. En effet, si $q = n$ (i.e. si le polynôme P n'a que des racines simples), on reconnaît une matrice carrée de Vandermonde associée à une famille de scalaires deux à deux distincts, et V est alors inversible. Si $q < n$, en introduisant $n - q$ scalaires deux à deux distincts et distincts des α_i, β_j et $\overline{\beta}_j$, on peut construire une matrice carrée d'ordre n de Vandermonde qui est inversible, et dont V est une matrice extraite. La liberté de la famille des colonnes de V traduit exactement la liberté de la famille de formes linéaires $\mathcal{F}$.

18. Le carré d'une somme de scalaires se développant comme suit: $\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^2 = \sum_{i,j} x_i x_j$, où le couple (i,j) décrit $[\![1,n]\!]^2$, on obtient

$$\begin{aligned} q(x_1,\cdots,x_n) &= \sum_{k=1}^{r} m_k \varphi_k(x_1,\cdots,x_n)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \psi_k(x_1,\cdots,x_n)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \overline{\psi}_k(x_1,\cdots,x_n)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{r} m_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_k^{i-1} x_i\Big)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_k^{i-1} x_i\Big)^2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{\beta}_k^{i-1} x_i\Big)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{r} m_k \sum_{i,j} \alpha_k^{i+j-2} x_i x_j + \sum_{k=1}^{s} n_k \sum_{i,j} \beta_k^{i+j-2} x_i + \sum_{k=1}^{s} n_k \sum_{i,j} \overline{\beta}_k^{i+j-2} x_i \\ &= \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{r} m_k \alpha_k^{i+j-2} + \sum_{k=1}^{s} n_k \beta_k^{i+j-2} + \sum_{k=1}^{s} n_k \overline{\beta}_k^{i+j-2} \right) x_i x_j \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} s_{i+j-2}\, x_i x_j \ . \end{aligned}$$

19. Si P est à racines toutes réelles, alors $s = 0$ et, pour $(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, les scalaires $\varphi_k(x_1,\cdots,x_n)$, avec $1 \le k \le r$, sont des réels, donc

$$\forall (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad q(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{r} m_k\, \varphi_k(x_1,\cdots,x_n)^2 \ge 0 \ .$$

20. Tout d'abord, si $x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors pour tout $k \in [\![1,s]\!]$, on a $\overline{\psi}_k(x) = \overline{\psi_k(x)}$, donc $\mathrm{Re}\,\big(\psi_k(x)\big) = \dfrac{1}{2}\,\big(\psi_k(x) + \overline{\psi}_k(x)\big)$ et $\mathrm{Im}\,\big(\psi_k(x)\big) = \dfrac{1}{2i}\,\big(\psi_k(x) - \overline{\psi}_k(x)\big)$. Les applications φ_k $(1 \le k \le r)$, $\mathrm{Re}(\psi_k)$ et $\mathrm{Im}(\psi_k)$ $(1 \le k \le s)$, restreintes à $\mathbb{R}^n$, sont bien $\mathbb{R}$-linéaires, donc appartiennent à $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Soient λ_1, $\cdots$, λ_r, μ_1, $\cdots$, μ_s, ν_1, $\cdots$, ν_s des réels tels que l'on ait, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, la relation

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k + \sum_{k=1}^{s} \mu_k\ \mathrm{Re}(\psi_k) + \sum_{k=1}^{s} \nu_k\ \mathrm{Im}(\psi_k) = 0 \ .$$

On obtient donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k\, \frac{\psi_k(x) + \overline{\psi}_k(x)}{2} + \sum_{k=1}^{s} \nu_k\, \frac{\psi_k(x) - \overline{\psi}_k(x)}{2i} = 0 \ ,$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k(x) + \frac{1}{2}\, \sum_{k=1}^{s} (\mu_k - i\nu_k)\, \psi_k(x) + \frac{1}{2}\, \sum_{k=1}^{s} (\mu_k + i\nu_k)\, \overline{\psi}_k(x) = 0 \ .$$

La forme $\mathbb{C}$-linéaire

$$\theta = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \varphi_k + \frac{1}{2}\, \sum_{k=1}^{s} (\mu_k - i\nu_k)\, \psi_k + \frac{1}{2}\, \sum_{k=1}^{s} (\mu_k + i\nu_k)\, \overline{\psi}_k$$

est donc nulle sur $\mathbb{R}^n$. Elle s'annule donc sur tous les vecteurs de la base canonique du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, c'est donc la forme linéaire nulle sur $\mathbb{C}^n$. La liberté de la famille $\mathcal{F}$ étudiée en **Q17.** permet d'affirmer que tous les coefficients sont nuls, en conséquence les λ_k, les μ_k et les ν_k sont nuls.

21. Le sens direct a été prouvé en **Q19.**

On a, pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$q(x) = \sum_{k=1}^{r} m_k\, \varphi_k(x)^2 + 2\sum_{k=1}^{s} n_k \left(\mathrm{Re}\big(\psi_k(x)\big)^2 - \mathrm{Im}\big(\psi_k(x)\big)^2\right).$$

NB: La relation $\psi_k^2 + \overline{\psi_k}^2 = 2\ \mathrm{Re}(\psi_k)^2 - 2\ \mathrm{Im}(\psi_k)^2$ est bien vraie sur $\mathbb{R}^n$ puisque, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\overline{\psi}_k(x) = \overline{\psi_k(x)}$.

Pour le sens indirect, par contraposition, supposons le polynôme P non scindé sur $\mathbb{R}$, i.e. $s \neq 0$. En admettant l'existence d'un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{Im}\big(\psi_1(x)\big) \neq 0$ et

$$\varphi_1(x) = \cdots = \varphi_r(x) = \mathrm{Re}\big(\psi_1(x)\big) = \mathrm{Re}\big(\psi_2(x)\big) = \mathrm{Im}\big(\psi_2(x)\big) = \cdots = \mathrm{Re}\big(\psi_s(x)\big) = \mathrm{Im}\big(\psi_s(x)\big) = 0\,,$$

on a alors $-2n_1\ \mathrm{Im}\big(\psi_1(x)\big)^2 < 0$, et q n'est pas à valeurs positives sur $\mathbb{R}^n$.

Suite multiplicative de Polya-Schur.

22. En choisissant $\gamma_n = n$, pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a $\Gamma(P) = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^k = XP'$.

Il résulte de **Q4.** que, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi, donc XP' aussi. La suite (n) est multiplicative au sens de Polya-Schur.

23. Soit (δ_n) la suite définie par $\delta_n = \gamma_{n+k}$ pour tout n, soit $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'opérateur associé. On a alors, pour tout polynôme P, la relation $\Gamma(X^k P) = X^k\,\Delta(P)$. En effet, si $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, alors $X^k P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^{j+k} = \sum_{l=k}^{n+k} a_{l-k} X^l$, puis

$$\Gamma(X^k P) = \sum_{l=k}^{n+k} \gamma_l\, a_{l-k} X^k = X^k \sum_{j=0}^{n} \gamma_{j+k}\, a_j X^j = X^k \sum_{j=0}^{n} \delta_j\, a_j X^j = X^k\,\Delta(P)\,.$$

Or, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de $X^k P$, puis de $\Gamma(X^k P)$ car (γ_n) est supposée multiplicative, et enfin de $\Delta(P)$ puisque tout diviseur d'un polynôme scindé est lui-même scindé. Donc $(\gamma_n)_{n\geq k}$ est multiplicative au sens de Polya-Schur.

24. • $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1}) = \gamma_{k+1} X^{k+1} - \gamma_{k-1} X^{k-1}$. Comme $X^{k+1} - X^{k-1} = X^{k-1}(X-1)(X+1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$, il doit en être de même de son image par Γ, ce qui entraîne $\gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \geq 0$. *En effet, si γ_{k+1} et γ_{k-1} sont strictement de signes opposés, on peut écrire $\gamma_{k-1} = -a^2\gamma_{k+1}$ avec $a > 0$, et on a alors $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1}) = \gamma_{k+1} X^{k-1}(X^2 + a^2)$ qui comporte un facteur non scindé sur $\mathbb{R}$.*

D'autre part, $\Gamma\big((1+X)^{k+1}\big) = \sum_{j=0}^{k+1} \gamma_j \begin{pmatrix} k+1 \\ j \end{pmatrix} X^j$, et comme $(1+X)^{k+1}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, ce polynôme doit l'être aussi. L'indication donnée par l'énoncé (entre les questions **23.** et

24.), avec $\gamma_k = 0$, montre que le produit $-2\,\gamma_{k+1}\,\gamma_{k-1}\,\begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix}$ doit être positif, donc que $\gamma_{k+1}\gamma_{k-1} \leq 0$.

Remarque. On pouvait aussi utiliser **Q6.** qui nous dit que la suite des coefficients du polynôme $\Gamma\big((1+X)^{k+1}\big)$ doit être ultra log-concave.

Finalement, $\gamma_{k+1}\gamma_{k-1} = 0$ puis $\gamma_{k+1} = 0$.

- Montrons maintenant par récurrence forte que, pour tout $m \geq k+1$, on a $\gamma_m = 0$. L'initialisation est faite: $\gamma_{k+1} = 0$.

Soit $m \geq k+2$, supposons $\gamma_k = \gamma_{k+1} = \cdots = \gamma_{m-1} = 0$, considérons le polynôme

$$\Gamma\big((1+X)^m\big) = \sum_{j=0}^{m} \gamma_j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} X^j = \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} X^j + \gamma_m X^m\ .$$

Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$ puisque $(1+X)^m$ l'est. Si $\gamma_m \neq 0$, il admet alors m racines réelles (en tenant compte des multiplicités) $x_1, \cdots, x_m$, et on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i = -\frac{\gamma_{m-1}}{\gamma_m} = 0$ et $\displaystyle\sum_{i<j} x_i x_j = \frac{\gamma_{m-2}}{\gamma_m} = 0$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i\Big)^2 - 2\sum_{i<j} x_i x_j = 0$, ce qui entraîne que toutes les racines x_i sont nulles, donc que $\Gamma\big((1+X)^m\big) = \gamma_m X^m$, puis que $\gamma_{k-1} = 0$, ce qui est absurde. On a donc prouvé que $\gamma_m = 0$.

25. Soit (γ_n) une suite multiplicative de réels non nuls.
On a $\Gamma(X^{k+1} - X^{k-1}) = X^{k-1}(\gamma_{k+1}X^2 - \gamma_{k-1})$. Comme $X^{k+1} - X^{k-1}$ est scindé sur $\mathbb{R}$, il doit en être autant de son image par Γ, ce qui entraîne que γ_{k+1} et γ_{k-1} sont de même signe (*cf.* début de la question **24.**). Donc:

- si γ_0 et γ_1 sont de même signe, la suite (γ_n) est de signe constant ;
- sinon, elle est alternée.

Théorème de Polya-Schur.

26. Le polynôme $Q_n = \Gamma\big((1+X)^n\big)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ puisque $(1+X)^n$ l'est et que la suite (γ_n) est multiplicative. Enfin, il est clair que, si $x \geq 0$, alors $Q_n(x) > 0$. Donc le polynôme Q_n a toutes ses racines réelles et strictement négatives.

27. L'énoncé n'est pas très clairement disposé. On supposera pour cette question que, **pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme Q_n a toutes ses racines réelles et négatives.

Soit alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme de degré d, scindé sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \geq d$, par le théorème de composition de Schur (ou "théorème 1"), on sait que le polynôme

$$P \circ P_n = \sum_{k=0}^{d} a_k \gamma_k \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)\, X^k$$

est scindé sur $\mathbb{R}$. Les coefficients a_d et γ_d étant non nuls, ramenons-nous à des polynômes unitaires en posant $T_n = \dfrac{P \circ P_n}{a_d\gamma_d\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{d-1}{n}\right)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \dfrac{a_k\ \gamma_k}{a_d\ \gamma_d\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{d-1}{n}\right)} X^k$.

Dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_d[X]$, la limite d'une suite de polynômes peut être calculée coefficient par coefficient, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n = T$ avec $T = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \frac{a_k\gamma_k}{a_d\gamma_d} X^k$.

Or, il est bien connu de tout étudiant de la filière PC (*non, c'est une blague!*) qu'une limite de polynômes unitaires scindés de degré d est encore un polynôme (unitaire de degré d) scindé sur $\mathbb{R}$. *Le lecteur intéressé pourra se référer à l'exercice 4 de l'épreuve 1 du concours e3a PSI 2015, où l'on commence par montrer qu'un polynôme P unitaire de degré d à coefficients réels est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'inégalité* $\left|P(z)\right| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^d$. Le polynôme $T = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n$ est donc scindé sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même du polynôme $a_d\gamma_d\, T = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k\gamma_k X^k$. Ceci prouve que la suite (γ_n) est multiplicative au sens de Polya-Schur.

28. Pour tout $k \geq 1$, le polynôme $P = X^{k+1} - 2X^k + X^{k-1} = X^{k-1}(X-1)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\Gamma(P) = X^{k-1}(\gamma_{k+1}X^2 - 2\gamma_k X + \gamma_{k-1})$ doit l'être aussi, ce qui entraîne que le discriminant du trinôme $\gamma_{k+1}X^2 - 2\gamma_k X + \gamma_{k-1}$ est positif, soit $\gamma_k^2 \geq \gamma_{k+1}\gamma_{k-1}$.

Variante. On peut aussi utiliser les questions **6.** et **26.** En effet, pour tout n fixé, le polynôme Q_n de **Q26** est à racines toutes réelles puisque la suite (γ_n) est multiplicative, la suite finie $\left(\gamma_k \dbinom{n}{k}\right)_{0\leq k\leq n}$ de ses coefficients est donc ultra log-concave d'après **Q6**, ce qui signifie exactement que la suite finie $(\gamma_k)_{0\leq k\leq n}$ est log-concave, et ceci est vrai pour tout n.

29. La suite $\left(\dfrac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}\right)$ est alors positive et décroissante, elle admet donc une limite $l \geq 0$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \gamma_n x^n$ est alors $\dfrac{1}{l} \in]0, +\infty]$ par la règle de d'Alembert.

30. Donc $\dfrac{\frac{\gamma_{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{\gamma_k}{k!}} = \dfrac{1}{k+1}\,\dfrac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et la série entière $\sum \dfrac{\gamma_k}{k!}x^k$ a un rayon de convergence infini par la règle de d'Alembert. Je suppose que la suite de polynômes recherchée est la suite (P_n), ce sont bien des polynômes à racines toutes réelles et négatives. Il reste à montrer la convergence uniforme sur tout segment de la suite (P_n) vers la fonction somme de la série entière, notée $s : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma_k}{k!}x^k$.

Soit donc $r > 0$ et le segment $S = [-r, r]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $x \in S$, on peut écrire

$$\begin{aligned} s(x) - P_n(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\gamma_k}{k!}x^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)x^k \\ &= R_n(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]x^k\,, \qquad (*) \end{aligned}$$

où $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\gamma_k}{k!} x^k$ est le reste d'ordre n de la série entière. On sait que cette série entière converge uniformément sur S, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,S} = 0$. Il reste à montrer que le deuxième terme de **(*)** converge aussi uniformément vers 0 sur le segment S. Par l'inégalité triangulaire et la positivité des coefficients, on a déjà la majoration uniforme

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] x^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_k}{k!} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] r^k$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$. Il suffit donc de montrer que le majorant tend vers 0. Pour cela, j'utiliserai le lemme suivant, qui est une adaptation du théorème de convergence dominée à la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Lemme. Soit $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres compexes, soit $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On suppose que:

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{n,k} = v_k$;

- domination: il existe une suite sommable $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall (n,k) \in \mathbb{N}^2 \qquad |u_{n,k}| \leq w_k \ .$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est sommable, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \ .$$

NB: Une suite (x_k) est dite **sommable** lorsque la série $\displaystyle\sum_k x_k$ est absolument convergente.

Preuve du lemme. Il suffit d'appliquer le théorème de convergence dominée des programmes de CPGE à la suite de fonctions (f_n) de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad f_n(t) = u_{n,\lfloor t \rfloor} \ .$$

Les fonctions f_n sont alors continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ car constantes sur chaque intervalle $[k, k+1[$ avec $k \in \mathbb{N}$, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction $f : t \mapsto f(t) = v_{\lfloor t \rfloor}$, elle aussi continue par morceaux. Enfin, on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad \big|f_n(t)\big| \leq \varphi(t) \ ,$$

en posant $\varphi(t) = w_{\lfloor t \rfloor}$, cette fonction φ est alors c.p.m. et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, c'est une conséquence facile du fait que $\displaystyle\int_0^{p+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{p} w_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} w_k$ pour tout p entier naturel.

Du théorème de convergence dominée usuel, on déduit alors l'intégrablité sur $\mathbb{R}_+$ de f_n pour tout n, soit la sommablilité de la suite $(u_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, et l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k \ .$$

On applique maintenant ce lemme à la suite double $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$, avec

$$u_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{\gamma_k}{k!}\left[1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\dfrac{k-1}{n}\right)\right] r^k & \text{si} \quad 0 \le k \le n \\ 0 & \text{si} \qquad k > n \end{cases}.$$

Les hypothèses du lemme sont en effet satisfaites avec $v_k = 0$, et $w_k = \dfrac{\gamma_k}{k!} r^k$. Cette dernière suite (w_k) est bien sommable puisque la série entière, de rayon de convergence infini, est absolument convergente pour tout réel. La conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_{n,k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} v_k = 0$ est ce que l'on souhaitait obtenir.

31. Si je comprends bien (l'énoncé est toujours très mal disposé), on ne suppose plus que la suite (γ_n) est multiplicative puisque c'est ce que l'on veut démontrer, mais on la suppose toujours strictement positive (*est-ce utile d'ailleurs ?*). Posons toujours $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\gamma_k}{k!} x^k$ pour tout $x \in \mathbb{C}$ (le rayon de convergence est supposé infini). Soit $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes réels à racines réelles négatives. Je vais me permettre de faire une hypothèse un peu plus forte que celle indiquée par l'énoncé (*je crois qu'on n'est plus vraiment à ça près, et puis peut-être est-ce équivalent en fait ?*), je supposerai que la convergence de la suite de fonctions polynomiales (F_m) vers s est uniforme **sur toute partie fermée bornée du plan complexe**. Posons $F_m = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{c_{k,m}}{k!} X^k$ (c'est en fait, pour tout m, une somme finie puisque c'est un polynôme).

Fixons $r > 0$. La formule intégrale de Cauchy permet d'écrire, pour tout $(m,k) \in \mathbb{N}^2$,

$$c_{k,m} = \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} F_m(re^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, \mathrm{d}\theta \qquad \text{et} \qquad \gamma_k = \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} s(re^{i\theta})\, e^{-ik\theta}\, \mathrm{d}\theta \, .$$

De la convergence uniforme de la suite de fonctions (F_m) vers s sur le disque fermé $\overline{D}(O,r)$, on déduit facilement que $\lim\limits_{m\to+\infty} c_{k,m} = \gamma_k$ pour tout k.

Soit maintenant $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme réel à racines toutes réelles. On veut montrer que $\Gamma(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \gamma_k X^k$ est encore à racines toutes réelles. Le théorème de composition de Schur, admis, nous apprend que le polynôme $P \circ F_m = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k c_{k,m} X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$. En passant à la limite comme dans la question **27.** ou à peu près car les polynômes considérés ne sont peut-être pas tous de degré n exactement, on pourra consulter pour cela
http://lalgebrisant.fr/images/pdfArticles/tangomatricesetpolynomes.pdf
on déduit que le polynôme $\Gamma(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \gamma_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Évidemment, tout ceci est à des années-lumière de l'esprit de la filière PC.