Mines M1 2020 - Corrigé - NON RELU

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

1. • Soit p le nilindice de u. Alors on a $u^p = 0$, donc $M^p = 0$.
Soit λ une valeur propre complexe de M et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.
Alos on a $MX = \lambda X$, et, par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k X = \lambda^k X$.
En particulier, on a $0 = 0X = M^p X = \lambda^p X$, donc, comme $X \neq 0$, on a $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.
On a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \{0\}$, et, comme le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$, de degré $n > 0$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \neq \varnothing$, donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$.
• Comme le polynôme caractéristique de M est scindé sur $\mathbb{C}$, M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ie M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure T, avec sur la diagonale de T les valeurs propres complexes de M, donc des zéros sur la diagonale.
• Pour tout $k \in N^*$,
$$\mathrm{tr}(u^k) = \mathrm{tr}(M^k) = \mathrm{tr}(T^k) = 0$$
car deux matrices semblables ont la même trace et, par produit matriciel, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T^k est triangulaire supérieure stricte.

2. • L'application $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto Mat_B(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
Par suite, comme $T_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\mathcal{N}_B = \Phi^{-1}(T_n^{++}(\mathbb{R}))$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de même dimension que $T_n^{++}(\mathbb{R})$, donc de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.
• Soit u l'endomorphisme de E défini sur la base B par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et $u(e_1) = 0$.
Posons, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $e_{-i} = 0$.
Avec cette notation, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = e_{i-1}$, et c'est encore valable pour $i \leq 0$, car $u(0) = 0$.
Montrons alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, "pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^k(e_i) = e_{i-k}$" (HR_k).
Initialisation : Pour $k = 0$, $u^0 = \mathrm{Id}_E$, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^0(e_i) = e_i = e_{i-0}$. On a donc bien HR_0.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$u^{k+1}(e_i) = u(u^k(e_i)) \underset{HR_k}{=} u(e_{i-k}) = e_{(i-k)-1} = e_{i-(k+1)},$$
donc on a bien HR_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^k(e_i) = e_{i-k}$.
De plus, $u \in \mathcal{N}_B$ car
$$Mat_B(u) = Mat_B(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = Mat_B(0, e_1, \ldots, e_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{R}).$$
Enfin, comme $u^{n-1}(e_n) = e_1 \neq 0$, on a $u^{n-1} \neq 0$, donc $\nu(u) \geq n$. Et, comme de plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u^n(e_i) = e_{i-n} = 0$ (car $i - n \leq 0$), u^n est nul sur une base, donc $u^n = 0$. On a donc aussi $\nu(u) \leq n$.
On a donc bien exhibé un élément u de $\mathcal{N}_B$ tel que $\nu(u) = n$.

3. • Soit $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) = 0$.
Supposons qu'il existe $i \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $a_i \neq 0$.
Alors on peut poser $i_0 = \min\{i \in [\![0, p-1]\!] : a_i \neq 0\}$, qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide, et, par définition de i_0,
$$0 = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^{i_0-1} \underbrace{a_i}_{=0} u^i(x) + \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^i(x) = \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^i(x).$$
En composant par u^{p-1-i_0}, qui est linéaire, on a alors :
$$0 = \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^{p-1-i_0+i}(x) = a_{i_0} u^{p-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} a_i \underbrace{u^{p-1-i_0+i}(x)}_{=0 \text{ car } p-(i_0+1)+i \geq p} = a_{i_0} u^{p-1}(x).$$
Or, par hypothèse, on a $u^{p-1}(x) \neq 0$, donc on a $a_{i_0} = 0$, ce qui est exclu par définition de i_0.
D'où, par l'absurde, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $a_i = 0$, donc la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est libre.
• Il en va de même pour la famille $(y, u(y), \ldots, u^{q-1}(y))$ par symétrie des rôles de x et y, et de p et q.

• Supposons de plus que $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre.
Soit $(a_0, \dots, a_{p-1}, b_0, \dots, b_{q-1}) \in \mathbb{R}^{p+q}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} b_i u^i(y) = 0$.
Supposons qu'il existe $i \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $a_i \neq 0$.
Alors on peut poser $i_0 = \min\{i \in [\![0, p-1]\!] : a_i \neq 0\}$, qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide.
De plus, comme $(a_0, \dots, a_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$ et la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, on a

$$\sum_{i=1}^{p-1} a_i u^i(x) \neq 0, \quad \text{donc} \quad \sum_{i=1}^{q-1} b_i u^i(y) = -\sum_{i=1}^{p-1} a_i u^i(x) \neq 0,$$

donc $(b_0, \dots, b_{q-1}) \neq (0, \dots, 0)$, ce qui nous permet de poser

$$i_1 = \min\{i \in [\![0, q-1]\!] : b_i \neq 0\},$$

qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide.
Par définition de i_0 et de i_1, on a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} b_i u^i(y) \\ &= \sum_{i=0}^{i_0-1} \underbrace{a_i}_{=0} u^i(x) + \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{i_1-1} \underbrace{b_i}_{=0} u^i(y) + \sum_{i=i_1}^{p-1} b_i u^i(y) \\ &= \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{i=i_1}^{p-1} b_i u^i(y). \end{aligned}$$

— Si $p-1-i_0 > q-1-i_1$, ie $p-1-i_0 \geq q-i_1$, alors, en composant par u^{p-1-i_0}, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^{p-1-i_0+i}(x) + \sum_{i=i_1}^{p-1} b_i u^{p-1-i_0+i}(y) \\ &= a_{i_0} u^{p-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} a_i \underbrace{u^{p-1-i_0+i}(x)}_{=0 \text{ car } p-(i_0+1)+i \geq p} + \sum_{i=i_1}^{p-1} b_i \underbrace{u^{p-1-i_0+i}(y)}_{=0 \text{ car } p-1-i_0+i \geq q-i_1+i_1=q} \\ &= a_{i_0} u^{p-1}(x), \end{aligned}$$

donc, comme $u^{p-1}(x) \neq 0$, on a $a_{i_0} = 0$, ce qui est contraire à la définition de i_0.
— Si $p-1-i_0 < q-1-i_1$, ie $q-1-i_1 \geq p-i_0$, alors, en composant par u^{q-1-i_1}, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^{q-1-i_1+i}(x) + \sum_{i=i_1}^{p-1} b_i u^{q-1-i_1+i}(y) \\ &= b_{i_1} u^{q-1}(x) + \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i \underbrace{u^{q-1-i_1+i}(x)}_{=0 \text{ car } q-1-i_1+i \geq p-i_0+i_0=p} + \sum_{i=i_1+1}^{p-1} b_i \underbrace{u^{q-1-i_1+i}(y)}_{=0 \text{ car } q-(i_1+1)+i \geq q} \\ &= b_{i_1} u^{q-1}(x), \end{aligned}$$

donc, comme $u^{q-1}(x) \neq 0$, on a $b_{i_1} = 0$, ce qui est contraire à la définition de i_1.
— Enfin, si $p-1-i_0 = q-1-i_1$, alors, en composant par $u^{p-1-i_0} = u^{q-1-i_1}$, on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=i_0}^{p-1} a_i u^{p-1-i_0+i}(x) + \sum_{i=i_1}^{p-1} b_i u^{q-1-i_1+i}(y) \\ &= a_{i_0} u^{p-1}(x) + b_{i_1} u^{q-1}(x) + \sum_{i=i_0+1}^{p-1} a_i \underbrace{u^{p-1-i_0+i}(x)}_{=0 \text{ car } p-(i_0+1)+i \geq p} + \sum_{i=i_1+1}^{p-1} b_i \underbrace{u^{q-1-i_1+i}(y)}_{=0 \text{ car } q-(i_1+1)+i \geq q} \\ &= a_{i_0} u^{p-1}(x) + b_{i_1} u^{q-1}(x), \end{aligned}$$

donc, comme $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre, on a $a_{i_0} = b_{i_1} = 0$, ce qui est contraire à la définition de i_0 et de i_1.
Dans tous les cas, on arrive à une contradiction, donc, par l'absurde, on a $(a_0, \dots, a_{p-1}) = (0, \dots, 0)$, puis, comme

$$0 = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) + \sum_{i=0}^{q-1} b_i u^i(y) = \sum_{i=0}^{q-1} b_i u^i(y),$$

où la famille $(y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre, on a $(b_0, \dots, b_{q-1}) = (0, \dots, 0)$.
La famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est donc bien libre.

4. • Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p.
Par définition du nilindice de u, il existe $x \in E$ tel que $u^p(x) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$.
D'où, d'après la question précédente, la famille $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre formée de p éléments de E.
Comme toute famille libre de E a au plus $n = \dim E$ éléments, on a bien $p \leq n$.
• Supposons de plus $p \geq n-1$ et $p \geq 2$. Pour tout $y \in \operatorname{Im} u^{p-1}$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p-1}(x)$, donc $y = u(u^{p-2}(x)) \in \operatorname{Im} u$ (avec $p-2 \geq 0$ car $p \geq 2$) et, comme $u(y) = u^p(x) = 0$, $y \in \operatorname{Ker} u$, donc on a $y \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$.
On a donc $\operatorname{Im} u^{p-1} \subset \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$.
Soit à présent $y \in \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ et $u(y) = 0$, donc $u^2(x) = 0$.
Soit $w \in \operatorname{Im}(u^{p-1}) \setminus \{0\}$ (qui existe car $u^{p-1} \neq 0$). Alors il existe $z \in E$ tel que $w = u^{p-1}(z)$, et $u^p(z) = 0$ car $p = \nu(u)$.
Si $u(x) \notin \operatorname{Vect}(w)$, alors, comme $w = u^{p-1}(z) \neq 0$, $(u(x), u^{p-1}(z))$ est libre, donc, d'après la question précédente, $(z, \ldots, u^{p-1}(z), x, u(x))$ est une famille libre de E, à $p+2 = n+1$ éléments, ce qui est exclu.
Par suite, on a $y = u(x) \in \operatorname{Vect}(w) \subset \operatorname{Im} u^{p-1}$.
On a donc aussi $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) \subset \operatorname{Im}(u^{p-1})$, donc on a bien $\operatorname{Im}(u^{p-1}) = \operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$.
Enfin, $u^{p-1} \neq 0$, donc $\operatorname{Im}(u^{p-1}) \neq \{0\}$, donc $\dim(u^{p-1}) \geq 1$,
et, si $\dim(u^{p-1}) \geq 2$, alors il existe une famille libre (w, z) formée d'éléments de $\operatorname{Im}(u^{p-1})$, et on peut alors construire (grâce à la question précédente) une famille libre de $2p = p + p \geq (n-1) + 2 = n+1$ éléments de E, ce qui est exclu.
D'où, par l'absurde, $\dim(u^{p-1}) \leq 1$, donc $\dim(u^{p-1}) = 1$.

II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

5. • D'après le cours, $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(E) \times 1 = \dim(E)$.
• Pour tout $a \in E$, φ_a est linéaire (par linéarité à droite du produit scalaire) et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\varphi_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
• Pour tout $(a, b) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$,
$$\begin{aligned}\varphi_{\lambda a+b}(x) &= (\lambda a + b|x) = \lambda(a|x) + (b|x) \quad \text{(par linéarité à gauche du produit scalaire)}\\ &= \lambda\varphi_a(x) + \varphi_b(x),\end{aligned}$$
donc $\varphi_{\lambda a+b} = \lambda\varphi_a + \varphi_b$.
L'application $a \mapsto \varphi_a$ est donc bien linéaire et va de E dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
• Soit $a \in E$ tel que $\varphi_a = 0$.
Alors pour tout $x \in E$, $\varphi_a(x) = 0$, donc, en particulier, pour $x = a \in E$, on a $\varphi_a(a) = 0$, ie $(a|a) = 0$. Comme un produit scalaire est défini, on a alors $a = 0$.
L'application linéaire $a \mapsto \varphi_a$ est donc injective, et, finalement, comme $\dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R})) = \dim(E)$, $a \mapsto \varphi_a$ est bijective, donc définit un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
6. • Pour tout $(a, b) \in E^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in E$,
$$\begin{aligned}((\lambda a + b) \otimes x)(z) &= (\lambda a + b|z)x = (\lambda(a|z) + (b|z))x \quad \text{(par linéarité à gauche du produit scalaire)}\\ &= \lambda(a|z)x + (b|z)x = \lambda(a \otimes x)(z) + (b \otimes x)(z),\end{aligned}$$
donc $(\lambda a + b) \otimes x = \lambda(a \otimes x) + b \otimes x$.
L'application $a \mapsto a \otimes x$ est donc linéaire.
• Pour tout $a \in E$, pour tout $z \in E$,
$$(a \otimes x)(z) = (a|z)x \in \operatorname{Vect}(x),$$
donc $\operatorname{Im}(a \otimes x) \subset \operatorname{Vect}(x)$, donc $a \otimes x \in \{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.
L'application $a \mapsto a \otimes x$ va donc bien de E dans $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Vect}(x)\} = \mathcal{L}(E, \operatorname{Vect}(x))$.
• Soit $a \in E$ tel que $a \otimes x = 0$. Alors, pour tout $z \in E$, $(a \otimes x)(z) = 0$, ie $(a|z)x = 0$, donc, comme $x \neq 0$, on a $(a|z) = 0$.
Ceci étant valable pour tout $z \in E$, on a, en particulier, pour $z = a$, $(a|a) = 0$, donc $a = 0$.
L'application linéaire $a \mapsto a \otimes x$ est donc injective.
• Enfin, comme $x \neq 0$, on a $\dim(\operatorname{Vect}(x)) = 1$, donc
$$\dim(\mathcal{L}(E, \operatorname{Vect}(x))) = \dim(E) \times \dim(\operatorname{Vect}(x)) = \dim(E),$$
donc $a \in E \mapsto a \otimes x \in \mathcal{L}(E, \operatorname{Vect}(x))$ est bijective.
7. • Si $a = 0$, alors $a \times x = 0$, donc $\operatorname{tr}(a \otimes x) = 0$, et $(a|x) = 0$, donc on a bien l'égalité.
• Si $a \neq 0$, (a) est libre, donc on peut compléter $\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right)$ en une base orthonormée $(\dfrac{a}{\|a\|}, e_2, \ldots, e_n)$ de E (où $n = \dim E$).
On a alors
$$\begin{aligned}(a \otimes x)\left(\frac{a}{\|a\|}\right) &= \left(a\Big|\frac{a}{\|a\|}\right)x = \frac{\|a\|^2}{\|a\|}x = \|a\|x\\ &= \|a\|\left(\left(\frac{a}{\|a\|}\Big|x\right)\frac{a}{\|a\|} + (e_2|x)e_2 + \ldots + (e_n|x)e_n\right) \quad \text{(coorodnnées dans une base orthonormée)}\\ &= (a|x)\frac{a}{\|a\|} + \|a\|(e_2|x)e_2 + \ldots + \|a\|(e_n|x)e_n\end{aligned}$$

et, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$,

$$(a \otimes x)(e_i) = (a|e_i)x = 0$$

(car la famille $(a, e_2, \dots, e_n)$ est orthogonale).
La matrice de $(a \otimes x)$ dans la base $(\frac{a}{\|a\|}, e_2, \dots, e_n)$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} (a|x) & 0 & \cdots & 0 \\ \|a\|(e_2|x) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|a\|(e_n|x) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donc $\mathrm{tr}(a \otimes x) = \mathrm{tr}(A) = (a|x)$.
• Dans tous les cas, on a bien $\mathrm{tr}(a \otimes x) = (a|x)$.

III. Deux lemmes

8. • Matriciellement, en fixant une base B de E et en notant U et V les matrices respectives de u et v dans cette base, cela revient à montrer qu'il existe une unique famille $(A_0^{(k)}, \dots, A_k^{(k)})$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (U + tV)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i A_i^{(k)}.$$

Or, par produit matriciel, chaque coefficient de $(U + tV)^k$ s'écrit comme une somme de produit de k coefficients de $U + tV$, donc est un polynôme de degré au plus k en t comme somme de produit de k polynômes de degré au plus 1 en t.
Notons $((U+tV)^k)_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) de $U+tV$. D'après ce qui précède, pour tout (i,j), il existe un unique $(a_{i,j}^{(0)}, \dots, a_{i,j}^{(k)})$ tel que

$$((U + tV)^k)_{i,j} = \sum_{i=0}^{k} a_{i,j}^{(i)} t^i$$

(décomposition dans la base canonique des polynômes).
Ceci assure alors l'unicité de la famille $(A_\ell^{(k)}) = (a_{i,j}^{(\ell)})_{i,j}$ telle que $(U + tV)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i A_i^{(k)}$.

• Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$ (HR_k).

Initialisation : pour $k = 1$, $u + tv = f_0^{(k)} + t f_1^{(k)}$ en posant $f_0^{(k)} = u$ et $f_1^{(k)} = v = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$. On a donc bien HR_1.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors, d'après le premier point et HR_k, on a

$$(u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)} = u^k + t \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} + t^2 w$$

où $w = \sum_{i=2}^{k} t^{i-2} f_i^{(k)} \in \mathcal{L}(E)$.
On a donc

$$\begin{aligned}
(u + tv)^{k+1} = (u + tv)^k (u + tv) & \\
&= (u^k + t \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} + t^2 w)u + t(u^k + t \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} + t^2 w)v \\
&= u^{k+1} + t \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-i} + t^2 wu + t u^k v + t^2 \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i} v + t^3 wv \\
&= u^{k+1} + t \left(u^k v + \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k+1-1-i} \right) + t^2 (\ldots) \\
&= u^{k+1} + t \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{(k+1)-1-i} + t^2 (\ldots).
\end{aligned}$$

Par unicité, on a donc bien $f_0^{(k+1)} = u^{k+1}$ et $f_1^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} u^i v u^{(k+1)-1-i}$, ie on a bien HR_{k+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

Rq : On aurait pu prouver l'existence par récurrence, mettant alors en évidence des relations entre les $f_i^{(k+1)}$ et les $f_i^{(k)}$, puis montrer l'unicité via l'écriture matricielle, et enfin trouver les écritures voulues pour $f_0^{(k)}$ et $f_1^{(k)}$ en se servant des relations mises en évidence durant la récurrence.

9. Comme $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel et $(u,v) \in \mathcal{V}^2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$, donc, par définition de p, on a

$$(u+tv)^p = 0 = 0 + t \times 0 + \ldots + t^p \times 0,$$

donc, par unicité de la décomposition (prouvée à la question précédente), on a

$$\forall i \in [\![0,p]\!], \quad f_i^{(p)} = 0.$$

En particulier, pour $i = 1$, on obtient $f_1^{(p)} = \sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. • La trace est une application linéaire, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(f_1^{(k+1)}) &= \mathrm{tr}\left(\sum_{i=0}^{k} u^i v u^{k-i}\right) \quad \text{(d'après l'expression trouvée à la question 8)}\\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}(u^i v u^{k-i}) \quad \text{(par linéarité de la trace)}\\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}((u^i v) u^{k-i}) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}(u^{k-i}(u^i v)) \quad (\text{car } \mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f))\\
&= \sum_{i=0}^{k} \mathrm{tr}(u^k v) = (k+1)\mathrm{tr}(u^k v).
\end{aligned}$$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(u+tv)$ est nilpotent donc, d'après la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $k+1 \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{tr}((u+tv)^{k+1}) = 0$.
Ficons $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, par linéarité de la trace,

$$\mathrm{tr}((u+tv)^{k+1}) = \sum_{i=0}^{k+1} t^i \mathrm{tr}(f_i^{(k+1)}),$$

donc $t \mapsto \mathrm{tr}((u+tv)^{k+1})$ est une fonction polyomiale en t.
Comme cette fonction est nulle, tous ses coefficients sont nuls, donc, en particulier,

$$\mathrm{tr}(f_1^{(k+1)}) = 0.$$

On a donc $(k+1)\mathrm{tr}(u^k v) = \mathrm{tr}(f_1^{(k+1)}) = 0$, donc, comme $k+1 \neq 0$, on a $\mathrm{tr}(u^k v) = 0$.

11. Soit $y \in E$. Soit $a \in K(\mathcal{V})^\perp$.
• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u + tv \in \mathcal{V}$, donc $(u+tv)^{p-1}(y) \in \mathcal{V}^\bullet \subset K(\mathcal{V})$, donc, comme $a \in K(\mathcal{V})^\perp$, on a

$$(a|(u+tv)^{p-1}(y)) = 0.$$

La fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto (a|(u+tv)^{p-1}(y))$ est donc la fonction nulle.
• En reprenant l'écriture $(u+tv)^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} t^i f_i^{(p-1)}$ obtenue à la question 8, on a, par linéarité de l'évaluation et par linéarité à droite du produit scalaire,

$$(a|(u+tv)^{p-1}(y)) = \left(a\middle|\left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i f_i^{(p-1)}\right)(y)\right) = \sum_{i=0}^{p-1} t^i (a|f_i^{(p-1)}(y)),$$

donc $t \mapsto (a|(u+tv)^{p-1}(y))$ est une fonction polynomiale en t.
Comme elle est nulle, tous ses coefficients sont nuls. En particulier, le coefficient de degré 1, $(a|f_1^{(p-1)}(y))$, est nul.
• On a donc $(a|f_1^{(p-1)}(y)) = 0$. Ceci étant valable pour tout $a \in K(\mathcal{V})^\perp$, on a $f_1^{(p-1)}(y) \in (K(\mathcal{V})^\perp)^\perp = K(\mathcal{V})$ (car E est euclidien).
• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, comme $u + tv \in \mathcal{V}$, on a $(u+tv)^p = 0$, donc

$$\begin{aligned}
0 = (u+tv)^p &= (u+tv)(u+tv)^{p-1}\\
&= (u+tv)\left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i f_i^{(p-1)}\right) \quad \text{(expression trouvée en question 8)}\\
&= u f_0^{(p-1)} + t u f_1^{(p-1)} + t v f_0^{(p-1)} + t^2 (\ldots)\\
&= u^p + t(u f_1^{(p-1)} + v f_0^{(p-1)}) + t^2 (\ldots)\\
&= t(u f_1^{(p-1)} + v u^{p-1}) + t^2 (\ldots),
\end{aligned}$$

donc, en appliquant en y, on a

$$0 = t(u(f_1^{(p-1)}(y)) + v(u^{p-1}(y))) + t^2\,(\ldots)\,(y).$$

En divisant par t, pour tout $t \neq 0$, on a donc

$$0 = (u(f_1^{(p-1)}(y)) + v(u^{p-1}(y))) + t\,(\ldots(y))$$

et, finalement, en faisant tendre t vers 0, et comme le terme non explicité dans la parenthèse est polynomial en t, donc a pour limite son terme constant (un vecteur dépendant de y), on obtient :

$$u(f_1^{(p-1)}(y)) + v(u^{p-1}(y)) = 0, \qquad \text{donc} \qquad v(u^{p-1}(y)) = -u(f_1^{(p-1)}(y)).$$

• Par suite, pour tout $x \in \mathrm{Im}\,(u^{p-1})$, il existe $y \in E$ tel que $x = u^{p-1}(y)$, et on a donc

$$v(x) = v(u^{p-1}(y)) = -u(f_1^{(p-1)}(y)) = u(\underbrace{-f_1^{(p-1)}(y)}_{\in K(\mathcal{V})}) \in u(K(\mathcal{V})).$$

12. Comme $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(x) + \mathcal{V}x$, pour tout $y \in K(\mathcal{V})$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathcal{V}$ tel que $y = \lambda x + v(x)$.
De plus, on a supposé que $x \in \mathrm{Im}\,(u^{p-1})$, donc il existe $z \in E$ tel que $x = u^{p-1}(z)$, et alors, d'après la question précédente,

$$v(x) = v(u^{p-1}(z)) = u(\underbrace{f_1^{(p-1)}(z)}_{\in K(\mathcal{V})}),$$

donc

$$y = \lambda x + u(\underbrace{f_1^{(p-1)}(z)}_{\in K(\mathcal{V})}).$$

En posant $w = f_1^{(p-1)}(z) \in K(\mathcal{V})$, on a montré que, pour tout $y \in K(\mathcal{V})$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in K(\mathcal{V})$ tels que $y = \lambda x + u(w)$.
• Fixons $y \in K(\mathcal{V})$ et montrons alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, "il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$" (HR_k).
Initialisation : Pour $k = 0$, comme $u^0 = \mathrm{Id}_E$, il suffit de prendre $\lambda_0 = 0$ et $y_k = y \in K(\mathcal{V})$. On a bien HR_0.
On a aussi HR_1 d'après le premier point de cette question.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors on a $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$ où $y_k \in K(\mathcal{V})$.
De plus, d'après le premier point, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $w \in K(\mathcal{V})$ tels que $y_k = \lambda x + u(w)$, et, en ré-injectant, on a alors :

$$y = \lambda_k x + u^k(y_k) = y = \lambda_k x + u^k(\lambda x + u(w)) = \lambda_k x + \lambda u^k(x) + u^{k+1}(w).$$

De plus, $x \in \mathrm{Im}\,(u^{p-1})$, donc il existe $z \in E$ tel que $x = u^{p-1}(z)$, et on a alors $u^k(x) = u^{p-1+k}(z) = 0$ car $p-1+k \geq p-1+1 = p$ et $u^p = 0$, donc

$$y = \lambda_k x + u^{k+1}(w).$$

On a bien HR_{k+1}, en posant $\lambda_k + 1 = \lambda_k \in \mathbb{R}$ et $y_{k+1} = w \in K(\mathcal{V})$.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. • En prenant $k = p$, il existe $\lambda_p \in \mathbb{R}$ et $y_p \in K(\mathcal{V})$ tels que

$$y = \lambda_p x + \underbrace{u^p}_{=0}(y_p) = \lambda_p x \in \mathrm{Vect}\,(x).$$

Ceci étant valable pour tout $y \in K(\mathcal{V})$, on a bien $K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(x)$.
• En gardant la notation $x = u^{p-1}(z)$, on a, pour tout $v \in \mathcal{V}$, d'après la question précédente,

$$v(x) = v(u^{p-1}(z)) = u(f_1^{(p-1})(z)),$$

où $f_1^{(p-1)}(z) \in K(\mathcal{V}) \subset \mathrm{Vect}\,(x)$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_1^{(p-1)}(z) = \lambda x = \lambda u^{p-1}(z)$, et on a donc :

$$v(x) = u(f_1^{(p-1})(z)) = u(\lambda u^{p-1}(z)) = \lambda\,\underbrace{u^p}_{=0}(z) = 0.$$

De plus, on a $x \in \mathcal{V}^\bullet$, *donc* $\mathrm{Vect}\,(x) \subset \mathrm{Vect}\,(\mathcal{V}^\bullet) = K(\mathcal{V})$, *donc on a, par double inclusion,*

$$K(\mathcal{V}) = \mathrm{Vect}\,(x).$$

IV. Démonstration du théorème B

13. • Soit $\varphi_x : v \in \mathcal{V} \mapsto v(x) \in E$. Par linéarité de l'évaluation, φ_x est linéaire, donc $\mathcal{V}x = \mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-esapce vectoriel de E et $\mathcal{W} = \mathrm{Ker}(\varphi_x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.
 • Soit $\psi_x : u \in \mathcal{W} \mapsto \bar{u} = \pi \circ u\,|_H \in \mathcal{L}(H)$.
 ψ_x est linéaire par distributivité de la composition, donc $\bar{\mathcal{V}} = \mathrm{Im}(\psi_x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{Z} = \mathrm{Ker}(\psi_x)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.
14. D'après le théorème du rang appliqué à φ_x, on a :
$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi_x)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi_x)) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{W}).$$
 D'après le théorème du rang appliqué à ψ_x, on a :
$$\dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathrm{Ker}(\psi_x)) + \dim(\mathrm{Im}(\psi_x)) = \dim(\bar{\mathcal{V}}) + \dim(\mathcal{Z}).$$
 On a donc bien
$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathcal{W}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \bar{\mathcal{V}}.$$
15. Par définition de $\mathcal{Z}$,
$$\mathcal{Z} = \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\} = \{u \in \mathcal{V} : u(x) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{u} = 0\}.$$
 Soit $u \in \mathcal{Z}$.
 Comme $E = \mathrm{Vect}(x) + (\mathrm{Vect}(x))^\perp$, pour tout $y \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathrm{Vect}(x)^\perp = H$ tels que $y = \lambda x + z$.
 On a donc $u(y) = \lambda u(x) + u(z) = u(z)$, et donc, comme $z \in H$, on a
$$\pi(u(y)) = \pi(u(z)) = \bar{u}(z) = 0,$$
 donc $u(y) \in \mathrm{Ker}\,\pi = H^\perp = \mathrm{Vect}(x)$. On a donc $u \in \mathcal{L}(E, \mathrm{Vect}(x))$.
 D'après la question 6, l'application $\gamma : a \in E \mapsto a \otimes x$ est un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathrm{Vect}(x))$, donc, en posant $L = \gamma^{-1}\mathcal{Z}$, sous-espace vectoriel de E de même dimension que $\mathcal{Z}$ (car γ^{-1} est un isomorphisme), on a $\mathcal{Z} = \gamma(L) = \{a \otimes x | a \in L\}$. • De plus, pour tout $a \in L$, $a \otimes x \in \mathcal{Z}$, donc $(a \otimes x)(x) = 0$, ie $(a|x)x = 0$, donc, comme $x \neq 0$, on a $(a|x) = 0$. Cei étant valable pour tout $a \in L$, on a bien $x \in L^\perp$.
16. Soit $u \in \mathcal{V}$.
 Soit $a \in L$. Alors $a \otimes x \in \mathcal{Z} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$.
 D'après le lemme C, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(u^k(a \otimes x)) = 0$.
 Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in E$, comme $(a|y) \in \mathbb{R}$ et u^k est linéaire, on a
$$(u^k(a \otimes x))(y) = u^k((a|y)x) = (a|y)u^k(x) = (a \otimes u^k(x))(y),$$
 donc $u^k(a \otimes x) = (a \otimes u^k(x))$.
 Enfin, d'après la question 7, comme $x \neq 0$, on a
$$(a|u^k(x)) = \mathrm{tr}(a \otimes u^k(x)) = \mathrm{tr}(u^k(a \otimes x)) = 0.$$
 Ceci étant valable pour tout $a \in L$, on a $u^k(x) \in L^\perp$.
 Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a bien $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.
 En particulier, pour $k = 1$, on a bien $\mathcal{V}x \subset L^\perp$.
17. • S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\lambda x \in \mathcal{V}x$, alors il existe $u \in \mathcal{V}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
 Alors, par récurrence immédiate, on a $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \underbrace{\lambda^k}_{\in \mathbb{R}^*} \underbrace{x}_{\in E \setminus \{0\}} \neq 0$,
 donc $u^k \neq 0$, donc u n'est pas nilpotent, ce qui est exclu (car $u \in \mathcal{V}$).
 D'où, par l'absurde, $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
 • Par suite, $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}(x)$, car, si $y \in \mathrm{Vect}(x) \cap \mathcal{V}(x)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x \in \mathcal{V}x$ et, d'après le premier point, on a alors $\lambda = 0$, donc $y = 0$.
 De plus, d'après les question 15 et 16, on a $\mathrm{Vect}(x) \subset L^\perp$ et $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, donc $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x \subset L^\perp$, donc
$$\dim L^\perp \geq \dim(\mathrm{Vect}(x)) + \dim(\mathcal{V}x) \geq \dim(\mathcal{V}x) + 1 \quad (\text{car } x \neq 0).$$
 On a donc bien
$$n = \dim E = \dim L + \dim L^\perp \geq \dim L + \dim(\mathcal{V}x) + 1. \quad \text{CDFD.}$$
18. • Montrons par récurrence sur k que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, "$(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $z \in H$ (HR_k).
 Initialisation : pour $k = 0$, pour tout $z \in H$, $u^0(z) = z \in H$, donc $\pi(u^0(z)) = z = \mathrm{Id}(z) = (\bar{u})^0(z)$. On a bien HR_0.
 Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée.
 Alors, pour tout $z \in H$, en posant $u^k(z) = \underbrace{\pi(u^k(z))}_{=w \in H} + \underbrace{(\mathrm{Id} - \pi)(u^k(z))}_{\in H^\perp = \mathrm{Vect}(x)}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u^k(z) = w + \lambda x$.
 On a alors
$$u^{k+1}(z) = u(u^k(z)) = u(w) + \lambda \underbrace{u(x)}_{=0 \text{ car } u \in \mathcal{W}} = u(w) = u\left(\pi(u^k(z))\right),$$

donc

$$\pi(u^{k+1}(z)) = \pi \circ u\left(\pi(u^k(z))\right) = \bar{u}\left(\pi(u^k(z))\right),$$

car $\left(\pi(u^k(z))\right) \in H$.
Or, d'après HR_k, $\left(\pi(u^k(z))\right) = \bar{u}^k(z)$, donc on a bien

$$\pi(u^{k+1}(z)) = \bar{u}\left(\pi(u^k(z))\right) = \bar{u}\left(\bar{u}^k(z)\right) = \bar{u}^{k+1}(z),$$

donc on a bien HR_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in H$, $(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$. • D'où, pour tout $f \in \bar{\mathcal{V}}$, il existe $u \in \mathcal{W}$ tel que $f = \bar{u}$, et alors,

$$\forall z \in H, \quad f^p(z) = (\bar{u})^p(z) = \pi(\underbrace{u^p}_{=0}(z)) = 0,$$

donc f est nipotent d'indice de nilpotence inférieur ou égal à p.
$\bar{\mathcal{V}}$ est donc bien un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$, de nilindice générique inférieur ou égal à p.

19. • $H = \mathrm{Vect}\,(x)^\perp$ est un espace vectoriel de dimension $n - \dim(\mathrm{Vect}\,(x)) = n-1$ (car $x \neq 0$).
$\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$ d'après la question 18.
D'où, d'après le théorème A, on a :

$$\dim \bar{\mathcal{V}} \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

• D'où, d'après la question 14,

$$\dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} = \dim \mathcal{V} - \dim \bar{\mathcal{V}} \geq \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n-1.$$

• Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} &= \dim(\mathcal{V}x) + \dim L \quad \text{(d'après la question 15)}\\ &\leq n-1 \quad \text{(d'après la question 17)},\end{aligned}$$

donc on a l'égalité et, par suite, $\dim \bar{\mathcal{V}} = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
De plus, on a aussi $\dim(\mathcal{V}x) + \dim(L) = n-1$, donc

$$\dim(\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(\mathrm{Vect}\,(x)) = \dim(\mathcal{V}x) + 1 = n-1-\dim(L)+1 = n - \dim(L) = \dim(L^\perp)$$

(où la somme directe a été prouvé en question 17) et donc, par inclusion (prouvée en question 17) et égalité des dimensions, on a

$$L^\perp = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

• Enfin, d'après la question 16, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$v^k(x) \in L^\perp = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

20. D'après la question précédente, $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace nilpotent de $\mathcal{L}(H)$ de dimension $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
D'où, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base B_H de H dans laquelle tout élément de $\bar{v}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte de $T^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$.
Or $\Phi : u \in \mathcal{L}(H) \mapsto Mat_{B_H}(u) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel, donc

$$\dim(\Phi(\bar{\mathcal{V}})) = \dim(\bar{\mathcal{V}}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \dim T^{++}_{n-1}(\mathbb{R}),$$

donc, par inclusion et égalité des dimensions, on a $\Phi(\bar{\mathcal{V}}) = T^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$. En appliquant la question 2, on construit alors un élément de $\bar{\mathcal{V}} = \Phi^{-1}(T^{++}_{n-1}(\mathbb{R}))$ de nilindice $n-1$, donc le nilindice générique de $\bar{\mathcal{V}}$ est supérieur ou égal à $n-1$.
Or, on a vu à la question 18 que le nilindice générique de $\bar{\mathcal{V}}$ était inférieur ou égal à p, donc on a bien $p \geq n-1$.
• Si de plus $\mathcal{V}x = \{0\}$, alors, d'après la question précédente,

$$L^\perp = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x = \mathrm{Vect}\,(x),$$

donc $L = (\mathrm{Vect}\,(x))^\perp = H$.
Comme $E = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus^\perp H$, $B = \{x\} \cup B_H$ est une base de E et, dans cette base, pour tout $v \in \mathcal{V}$,

$$Mat_B(v) = \left(\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline C & D \end{array}\right),$$

où, comme $v(x) = 0$ (car $\mathcal{V}x = \{0\}$,), on a $a = 0$ et $C = 0_{n-1,1})$, et, par construction, $D = Mat_{B_H}(\bar{v}) \in T^{++}_{n-1}(\mathbb{R})$, donc $Mat_B(v)$ est bien triangulaire supérieure stricte.
On a donc prouvé l'hérédité, sous réserve de prouver l'existence d'un x tel que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

21. On a $p \geq n-1$ d'après la question 20 et $p \geq 2$ (car $\mathcal{V} \neq 0$).
Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$.
— Si $v^{p-1} = 0$, alors on a bien sûr $\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \{0\} \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
— Si $v^{p-1} \neq 0$, alors v est de nilindice p avec $p \geq n-1$ et $p \geq 2$, donc, d'après la question 4,

$$\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v) \text{ et est de dimension 1.}$$

Or, comme $v(x) \neq 0$ et $v^p(x) = 0$, $i_0 = \max\{i \in \mathbb{N} : v^i(x) \neq 0\} = \max\{i \in [\![1, p-1]\!] : v^i(x) \neq 0\}$ existe comme maximum d'un ensemble fini non vide.
Alors on a $v^{i_0}(x) \neq 0$ et $v(v^{i_0}(x)) = v^{i_0+1}(x) = 0$ par définition de i_0, donc $v^{i_0}(x) = v(v^{i_0-1}(x)) \in \operatorname{Im}(v)$ (avec $i_0 - 1 \geq 0$) et $v_{i_0}(x) \in \operatorname{Ker} v$, donc $v^{i_0}(x) \in \operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v) = \operatorname{Im}(v^{p-1})$ et, comme $v^{i_0}(x) \neq 0$, $\dim \operatorname{Vect}(v^{i_0}(x)) = 1 = \dim \operatorname{Im}(v^{p-1})$, donc, par inclusion et égalité des dimensions, on a

$$\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \operatorname{Vect}(v^{i_0}(x)).$$

Enfin, d'après la question 19, $v^{i_0}(x) \in \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, donc

$$\operatorname{Im}(v^{p-1}) = \operatorname{Vect}(v^{i_0}(x)) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

Dans tous les cas, on a bien $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$.
— si $v(x) \neq 0$, alors $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ d'après la question 21.
— si $v(x) = 0$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v + tv_0 \in \mathcal{V}$ et $(v + tv_0)(x) = v(x) + tv_0(x) = v(x) \neq 0$, donc $\operatorname{Im}(v + tv_0)^{p-1} \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
Alors, pour tout $a \in (\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp}$, on a, pour tout $y \in E$, $(a|(v + tv_0)^{p-1}(y)) = 0$.
En développant $(v + tv_0)^{p-1}$ comme dans la question 8 (en remplaçant u par v et v par v_0), on obtient :

$$(v + tv_0)^{p-1} = v^{p-1} + \sum_{i=1}^{p-1} t^i f_i^{(p-1)},$$

donc, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\begin{aligned} 0 &= (a|(v + tv_0)^{p-1}(y)) \\ &= \left(a|v^{p-1}(y) + \sum_{i=1}^{p-1} t^i f_i^{(p-1)}(y)\right) \\ &= (a|v^{p-1}(y)) + \sum_{i=1}^{p-1} t^i (a|f_i^{(p-1)}(y)), \end{aligned}$$

donc la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto (a|(v + tv_0)^{p-1}(y))$ est polynomiale et nulle, donc tous ses coefficients sont nuls, donc, en particulier, $(a|v^{p-1}(y)) = 0$.
Ceci étant valable pour tout $a \in (\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp}$, on a

$$v^{p-1}(y) \in ((\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x)^{\perp})^{\perp} = \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

Ceci étant valable pour tout $y \in E$, on a bien $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
Dans tous les cas, on a bien $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

23. S'il existe $x \in \mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{V}x \neq \{0\}$, alors il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$, et alors, d'après la question 22, pour tout $v \in \mathcal{V}$, $\operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
D'où $\mathcal{V}^{\bullet} = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} \operatorname{Im}(v^{p-1}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$, et donc

$$K(\mathcal{V}) = \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^{\bullet}) \subset \operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$$

comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\operatorname{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.
D'où, d'après la question 12, on a $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$, donc $\mathcal{V}x = \{0\}$. C'est contraire à l'hypothèse faite sur x.
D'où, par l'absurde, pour tout $x \in \mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$, on a $\mathcal{V}x \neq \{0\}$, et, comme $\mathcal{V}^{\bullet} \neq \{0\}$ par définition, il existe $x \in \mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{V}x \neq \{0\}$, et la question 20 s'applique donc.