Mines 2018 M1 - Corrigé

A Coefficients binomiaux

1. Pour tout $k \in \{0, \dots, [n/2]-1\}$

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\frac{n-2k-1}{(k+1)(n-k)} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}(n-2k-1).\end{aligned}$$

Or, $k \leq [n/2]-1 \leq n/2-1$, donc $2k \leq n-2$, donc $n-2k-1 \geq 1 \geq 0$, donc $\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} \geq 0$, donc l'application $k \mapsto \binom{n}{k}$ est croissante sur $\{0, \dots, [n/2]\}$.
Par suite,
– pour tout $k \in \{0, \dots, [n/2]\}$, $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}$
– pour tout $k \in \{[n/2]+1, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \leq \binom{n}{[n/2]}$ car

$$[n/2]+1 \leq k \leq n \Rightarrow 0 \leq k \leq n-[n/2]-1 = \begin{cases} 2i-i-1 = i-1 \leq i = [n/2] & \text{si } n = 2i \\ 2i+1-i-1 = i = [n/2] & \text{si } n = 2i+1 \end{cases}$$

On a donc bien

$$\boxed{\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}.}$$

2. • Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Alors $[n/2] = k$ et

$$\begin{aligned}\binom{n}{[n/2]} = \frac{(2k)!}{k!k!} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2k)}\left(\dfrac{2k}{e}\right)^{2k}}{\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^{k}} \\ &= \frac{2^{2k}k^{2k}e^{2k}}{k^{2k}e^{2k}\sqrt{\pi k}} = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi k}} = \frac{2^n}{\sqrt{\pi/2}\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

• Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Alors $[n/2] = k$ et

$$\begin{aligned}\binom{n}{[n/2]} = \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi(2k+1)}\left(\dfrac{2k+1}{e}\right)^{2k+1}}{\sqrt{2\pi k}\left(\dfrac{k}{e}\right)^{k}\sqrt{2\pi(k+1)}\left(\dfrac{k+1}{e}\right)^{k+1}} \\ &= \frac{(2k+1)^{2k+1}e^{2k+1}}{k^k(k+1)^{k+1}e^{2k+1}\sqrt{2\pi\dfrac{k(k+1)}{2k+1}}} = \frac{2^{2k+1}k^{2k+1}\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k+1}}{k^k k^{k+1}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}\sqrt{2\pi\dfrac{k(k+1)}{2k+1}}} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2k+1}\overbrace{\left(1+\dfrac{1}{2k}\right)^{2k+1}}^{\to e\neq 0}}{\underbrace{\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k+1}}_{\to e\neq 0}\sqrt{\pi k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2k+1}}{\sqrt{\pi k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{\sqrt{\pi/2}\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

• Dans tous les cas, on a

$$\boxed{\binom{n}{[n/2]} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n}{\sqrt{\pi/2}\sqrt{n}}.}$$

Par suite, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\binom{n}{[n/2]}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}}$. Or, $\dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}} < 1$, donc, par définition d'une limite, pour $\varepsilon = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}} > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{\binom{n}{[n/2]}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} \in \left]\frac{1}{\sqrt{\pi/2}} - \varepsilon, \frac{1}{\sqrt{\pi/2}} + \varepsilon\right[\Rightarrow \frac{\binom{n}{[n/2]}}{\frac{2^n}{\sqrt{n}}} \leq 1 \Rightarrow \binom{n}{[n/2]} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{2^{k-1}}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{2^{k-1}}{n^k} = \frac{2^{k-1}}{k!}\frac{(n-k+1)\cdots(n-1)n}{n^k} \\ &= \prod_{i=2}^{k}\underbrace{\frac{2}{i}}_{\in[0,1]} \times \prod_{i=0}^{k-1}\underbrace{\frac{n-i}{n}}_{\in[0,1]} \in [0,1],\end{aligned}$$

donc on a bien $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, \ldots, n\}, \quad \binom{n}{k}2^{k-1} \leq n^k.}$

4. • Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i = \dfrac{1}{2}(v - (v - 2e_i))$.

   Or, $v \in \Omega_{1,n}$ (car $(1, \ldots, 1) \in \Omega_{1,n}$) et $v - 2e_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} e_j - e_i \in \Omega_{1,n}$ (car $(1, \ldots, 1, -1, 1, \ldots, 1) \in \Omega_{1,n}$),

   donc $e_i \in \mathrm{Vect}\,(\Omega_{1,n})$.

   • Par suite, $\mathbb{R}^n = \mathrm{Vect}\,((e_i)_{1\leq i\leq n}) \subset \mathrm{Vect}\,(\Omega_{1,n})$ (comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\Omega_{1,n}$).
   Comme on a aussi $\mathrm{Vect}\,(\Omega_{1,n}) \subset \mathbb{R}^n$ (comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathbb{R}^n$), on a bien

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(\Omega_{1,n}) = \mathbb{R}^n.}$$

B Dimension 2

5. On a $\det M^{(2)} = M^{(2)}_{1,1}M^{(2)}_{2,2} - M^{(2)}_{1,2}M^{(2)}_{2,1}$.

   Or, pour tout $(i,j) \in [\![1,2]\!]^2$, $M^{(2)}_{i,j}$ admet une espérance (variable finie) et

$$E(M^{(2)}_{i,j}) = 1 \times P(M^{(2)}_{i,j} = 1) + (-1) \times P(M^{(2)}_{i,j} = -1) = 0.$$

   Donc $M^{(2)}_{1,1}M^{(2)}_{2,2}$ et $M^{(2)}_{1,2}M^{(2)}_{2,1}$ admettent une espérance comme produit de variables indépendantes admettant une espérance et

$$E(M^{(2)}_{1,1}M^{(2)}_{2,2}) = E(M^{(2)}_{1,1})E(M^{(2)}_{2,2}) = 0 = E(M^{(2)}_{1,2}M^{(2)}_{2,1}).$$

   Enfin, $\det M^{(2)}$ admet une eséprance comme somme de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$E(\det M^{(2)}) = E(M^{(2)}_{1,1}M^{(2)}_{2,2}) - E(M^{(2)}_{1,2}M^{(2)}_{2,1}) = 0.$$

6. • Soit X et Y deux variables indépendantes ayant la même loi :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = P(Y = 1) = 1/2 = P(X = -1) = P(Y = -1).$$

   Alors $(XY)(\Omega) = \{\pm 1\}$ et

$$\begin{aligned}P(XY = 1) &= P((X = 1 \cap Y = 1) \cup (X = -1 \cap Y = -1)) \\ &= P(X = 1 \cap Y = 1) + P(X = -1 \cap Y = -1) \quad \text{(incompatibles)} \\ &= P(X = 1)P(Y = 1) + P(X = -1)P(Y = -1) \quad \text{(indépendants)} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Par suite, $P(XY = -1) = 1 - P(XY = 1) = 1/2$.

Remarque.
On vient de démontrer que, si deux variables X et Y sont indépendantes et ont la même loi :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = P(Y = 1) = 1/2 = P(X = -1) = P(Y = -1),$$

alors XY suit la même loi.
Une récurrence rapide permet alors de démontrer que, si $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes, et de même loi :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad X_i(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad P(X_i = 1) = 1/2 = P(X_i = -1),$$

alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} X_i$ suit la même loi.

- $M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)}$ et $M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)}$ suivent donc la même loi que $M_{1,1}^{(2)}$.

Or, $M_{1,1}^{(2)}$ admet une variance (variable finie) et

$$V(M_{1,1}^{(2)}) = 1^2 P(M_{1,1}^{(2)} = 1) + (-1)^2 P(M_{1,1}^{(2)} = -1) - E(M_{1,1}^{(2)})^2 = 1,$$

donc $M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)}$ et $M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)}$ admettent une variance et

$$V(M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)}) = V(M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)}) = 1.$$

Par suite, $\det(M^{(2)})$ admet une variance comme combinaison linéaire de variables admettant une variance et, comme $M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)}$ et $M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)}$ sont indépendantes,

$$V(\det(M^{(2)})) = V(M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)}) + (-1)^2 V(M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)}) = 2.$$

Remarque. Pour affirmer l'indépendance de $M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)}$ et $M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)}$, on a utiliser le lemme de coalition (hors-programme)... mais on peut aussi montrer l'indépendance à la main (il n'y a que 4 cas à tester).

7. $P(\det M^{(2)} = 0) = P(M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)} = M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)})$.
Or, $(M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)})(\Omega) = \{\pm 1\}$, donc

$$\begin{aligned}
P(\det M^{(2)} = 0) &= P((M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)} = 1 \cap M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)} = 1) \cup (M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)} = 1 \cap M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)} = 1)) \\
&= P((M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)} = 1) P(M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)} = 1) + P(M_{1,1}^{(2)} M_{2,2}^{(2)} = 1) P(M_{1,2}^{(2)} M_{2,1}^{(2)} = 1)) \quad \text{(inc, puis ind)} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

C Quelques bornes

8. • Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $L_k^{(n)}$ est un vecteur aléatoire ayant pour loi :

$$L_k^{(n)}(\Omega) = \{\pm 1\}^n \quad \text{et} \quad \forall (\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n, \quad P\left(L_k^{(n)} = (\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

d'après la formule des propbabilités totales avec le système complet d'événements $(L_1^{(n)} = (\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]})_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(L_1^{(n)} = L_2^{(n)}) &= \sum_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n} P(L_1^{(n)} = (\varepsilon_j) \cap L_2^{(n)} = L_1^{(n)}) \\
&= \sum_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n} P(L_1^{(n)} = (\varepsilon_j) \cap L_2^{(n)} = (\varepsilon_j)) \\
&= \sum_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n} P(L_1^{(n)} = (\varepsilon_j) P(L_2^{(n)} = (\varepsilon_j)) \quad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n} \frac{1}{2^{2n}} = 2^n \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n} \\
\text{et} \quad P(L_1^{(n)} = -L_2^{(n)}) &= \sum_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n} P(L_1^{(n)} = (\varepsilon_j)) P(L_2^{(n)} = \underbrace{-(\varepsilon_j)}_{\in \{\pm 1\}^n}) \\
&= \sum_{(\varepsilon_j)_{j \in [\![1,n]\!]} \in \{\pm 1\}^n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^n},
\end{aligned}$$

donc, comme $(L_1^{(n)} = L_2^{(n)})$ et $(L_1^{(n)} = -L_2^{(n)})$ sont incompatibles (car $L_2^{(n)} \neq 0$),

$$P((L_1^{(n)} = L_2^{(n)}) \cup (L_1^{(n)} = -L_2^{(n)})) = P(L_1^{(n)} = L_2^{(n)}) + P(L_1^{(n)} = -L_2^{(n)}) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

- On a $(L_1^{(n)} = L_2^{(n)}) \cup (L_1^{(n)} = -L_2^{(n)}) \Rightarrow M^{(n)}$ non inversible $\Rightarrow \det M^{(n)} = 0$, donc

$$P\left(\det M^{(n)} = 0\right) \geq P((L_1^{(n)} = L_2^{(n)}) \cup (L_1^{(n)} = -L_2^{(n)})) = \frac{1}{2^{n-1}} = 2^{1-n}.$$

9. $\star$ Montrons l'équivalence par double implication.
   - S'il existe $j \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $l_{j+1} \in \operatorname{Vect}(\{l_1, \cdots, l_j\})$, alors la famille $(l_1, \dots, l_{j+1})$ est liée, donc la famille $(l_1, \dots, l_n)$ est liée.
   - Si la famille $(l_1, \dots, l_n)$ est liée, alors il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i l_i = 0$.

   Alors, en notant $i_0 = \max\{i \in [\![1, n]\!] : a_i \neq 0\}$ (qui existe car cet ensemble fini est non vide et majoré), on a $l_{i_0} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i_0-1} -\frac{a_i}{a_{i_0}} l_i \in \operatorname{Vect}(l_1, \dots, l_{i_0-1})$.
   - Par double implication, on a bien l'équivalence souhaitée.

   $\star$ On a alors

$$\begin{aligned} P(\det M^{(n)} = 0) &= P(\text{« } (L_1^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}) \text{ est une famille liée »}) \\ &= P\left(\bigcup_{j=1}^{n-1} L_{j+1}^{(n)} \in \operatorname{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})\right) \quad \text{(d'après le premier point)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{n-1} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \operatorname{Vect}(L_1^{(n)}, \dots, L_j^{(n)})\right) \quad \text{(par sous-additivité de } P\text{)}. \end{aligned}$$

10. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d.
    Alors, $\mathcal{H}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-d$, donc il existe $(f_1, \dots, f_{n-d})$ base de $\mathcal{H}^\perp$.
    On a alors :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{H} &\Leftrightarrow x \in (\mathcal{H}^\perp)^\perp \quad \text{(car } \mathbb{R}^n \text{ est de dimension finie)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n-d]\!], \langle f_i, x \rangle = 0 \quad \text{(car } (f_1, \dots, f_{n-d}) \text{ engendre } \mathcal{H}^\perp) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n-d]\!], \alpha_{i,1} x_1 + \cdots \alpha_{i,n} x_n = 0 \quad \text{(en notant } f_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n})) \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-d,1} & \cdots & \alpha_{n-d,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

11. - La famille $(f_1, \dots, f_{n-d})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$.
    $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
    Donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$ tel que la famille $(f_1, \dots, f_{n-d}, e_{i_1}, \dots, e_{i_d})$ soit une base de $\mathbb{R}^n$.
    Sa matrice M dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est donc inversible, donc ${}^tM$ est inversible.
    - Enfin,

$$x \in \mathcal{H} \text{ et } \forall k \in [\![1, d]\!], x_{i_k} = y_k \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} x_j = 0, \quad \forall i \in [\![1, n-d]\!] \\ x_{i_k} = y_k \end{cases} \quad \text{(d'après la question 10)}$$

$$\Leftrightarrow {}^tM \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = ({}^tM)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \quad \text{(car } {}^tM \text{ inversible)},$$

    ce qui assure l'existence et l'unicité du vecteur x.

12. - Pour tout $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$, notons x_y l'unique élément $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{H}$ tel que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, $x_{i_k} = y_k$ (où on a repris les notations de la question précédente). Alors

$$L_1^{(n)} \in \mathcal{H} \Leftrightarrow L_1^{(n)} \in \mathcal{H} \cap \{\pm 1\}^n \Leftrightarrow L_1^{(n)} \in \{x_y,\ y \in \{\pm 1\}^d\} \cap \{\pm 1\}^n.$$

donc

$$\begin{aligned}
P(L_1^{(n)} \in \mathcal{H}) &= P(L_1^{(n)} \in \{x_y,\ y \in \{\pm 1\}^d\}) \\
&= \sum_{y \in \{\pm 1\}^d} P(L_1^{(n)} = x_y) \quad \text{(événements incompatibles)} \\
&\leq \sum_{y \in \{\pm 1\}^d} \frac{1}{2^n} \qquad \text{car} P(L_1^{(n)} = x_y) = \begin{cases} 1/2^n & \text{si } x_y \in \{\pm 1\}^n \\ 0 & \text{si } x_y \notin \{\pm 1\}^n \end{cases} \\
&= 2^d \frac{1}{2^n} = 2^{d-n}.
\end{aligned}$$

• De même, on montre que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P(L_j^{(n)} \in \mathcal{H}) \leq 2^{d-n}$.
• Pour tout $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(L_1^{(n)} = l_1, \ldots, L_j^{(n)} = l_j)_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}}$, on a :

$$\begin{aligned}
P\big(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)})\big) &= \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} P\left(\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)})\right) \cap \left(L_1^{(n)} = l_1, \ldots, L_j^{(n)} = l_j\right)\right) \\
&= \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} P\left(\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)\right) \cap \left(L_1^{(n)} = l_1, \ldots, L_j^{(n)} = l_j\right)\right) \\
&= \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)\right) \times P\left(L_1^{(n)} = l_1\right) \times \ldots \times P\left(L_j^{(n)} = l_j\right) \quad \text{(indépendance des } L_i\text{)} \\
&= \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)\right) \times \frac{1}{2^n} \times \ldots \times \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} \frac{1}{2^{nj}} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)\right) \\
&\leq \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} \frac{1}{2^{nj}} 2^{\dim(\mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)) - n} \quad \text{(d'après le premier point)} \\
&\leq \sum_{l_1, \ldots, l_j \in \Omega_{1,n}} \frac{1}{2^{nj}} 2^{j-n} \quad \text{(car } \dim \mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j) \leq j\text{)} \\
&= 2^{nj} \frac{1}{2^{nj}} 2^{j-n} \quad \text{(somme de } |\Omega_{1,n}^j| = 2^{nj} \text{ termes constants)} \\
&= 2^{j-n}.
\end{aligned}$$

13. Soit $q < n$ et $\omega \in \Omega_{q,n}$. On note $l_1, \ldots, l_q$ ses vecteurs lignes.
• Soit $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)$. $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de dimension $d \leq j$.
Soit alors $(g_1, \ldots, g_d)$ une sous-famille de $(l_1, \ldots, l_j)$ qui soit une base de $\mathrm{Vect}\,(l_1, \ldots, l_j)$.
Posons enfin $g_1 = (\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{1,n})$, $\ldots$ $g_d = (\alpha_{d,1}, \ldots, \alpha_{d,n})$.
Alors $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \in \mathcal{H}^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{1,1} x_1 + \cdots + \alpha_{1,n} x_n = 0 \\ \ldots \\ \alpha_{d,1} x_1 + \cdots + \alpha_{d,n} x_n = 0 \end{cases}$
En résolvant ce système par pivot de Gauss, on n'effectue que des produits, somme, quotient, différence, les coefficients de ce système resteront rationnels. En prenant des paramètres rationnels, et en remontant le système, pour les mêmes raisons, on aura une solution $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$.
Notons $x = \left(\dfrac{p_1}{q_1}, \ldots, \dfrac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_i \in \mathbb{Z}$ et $q_i \in \mathbb{N}^*$.
Alors $q_1 \ldots q_n x = \left(p_1 \prod_{i=2}^{n} q_i, \ldots, p_n \prod_{i=1}^{n-1} q_i\right) \in \mathbb{Z}^n$ et $q_1 \ldots q_n x \in \mathrm{Vect}\,(x) \subset \mathcal{H}^\perp$.

D Théorème de Erdös-Littlewood-Offord

14. • Soit A et B deux éléments de $\mathcal{A}_k$.
Si $A \subset B$ ou $B \subset A$, alors comme $|A| = |B|$, $A = B$.
Par contraposée, si $A \neq B$, alors A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A.
$\mathcal{A}_k$ est donc bien une anti-chaîne.

- Par définition de $\binom{n}{k}$,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}_k| &= \binom{n}{k} \\
&\leq \binom{n}{[n/2]} \quad \text{(d'après la question 1)} \\
&\leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \quad \text{pour } n \text{ assez grand} \quad \text{(d'après la question 2).}
\end{aligned}$$

15. Soit $\sigma \in S_A$. Alors
   - $\sigma |_{\{1,\dots,|A|\}}$ est une bijection de $\{1,\dots,|A|\}$ sur A
   - $\sigma |_{\{|A|+1,\dots,n\}}$ est une bijection de $\{|A|+1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\} \setminus A$.

   Soit alors $\phi : \sigma \in S_A \mapsto (\sigma |_{\{1,\dots,|A|\}}, \sigma |_{\{|A|+1,\dots,n\}})$.
   ϕ est une bijection de S_A sur$S(\{1,\dots,|A|\}, A) \times S(\{|A|+1,\dots,n\}, \{1,\dots,n\} \setminus A)$ en notant $S(E,F)$ l'ensemble des bijections de E sur F.
   Par suite, $\boxed{|S_A| = (|A|)!(n-|A|)!.}$
16. Soit $B \in \mathcal{A}$ avec $B \neq A$ et supposons, quitte à échanger A et B, que $|A| \leq |B|$.
   Soit $f \in S_A \cap S_B$.
   Comme $f \in S_A$, $A = f(\{1,\dots,|A|\})$.
   Comme $f \in S_B$, $B = f(\{1,\dots |B|\})$.
   Enfin, comme $|A| \leq |B|$,
   $$A = f(\{1,\dots,|A|\}) \subset f(\{1,\dots,|B|\}) = B,$$
   ce qui est impossible car $A \neq B$ et $\mathcal{A}$ est une anti-chaîne.
   Par suite, $\boxed{S_A \cap S_B = \emptyset.}$
17. On a $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} S_A \subset S([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])$.
   Comme cette réunion est disjointe, on a $\sum\limits_{A \in \mathcal{A}} |S_A| \leq |S([\![1,n]\!],[\![1,n]\!])| = n!$.
   De plus,
   $$\begin{aligned}
   \sum_{A \in \mathcal{A}} |S_A| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A|=k}} |S_A| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A|=k}} (|A|)!(n-|A|)! = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ |A|=k}} k!(n-k)! \\
   = \sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)! \quad \text{(par définition de } a_k\text{),}
   \end{aligned}$$
   donc on a
   $$\sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)! \leq n!, \text{ donc } \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$
18. D'après la question 1, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \geq \dfrac{1}{\binom{n}{[n/2]}}$, donc, comme $a_k \geq 0$, $\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}} \geq \dfrac{a_k}{\binom{n}{[n/2]}}$.
   En sommant ces inégalités pour $k = 0..n$, on a
   $$\frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} |\mathcal{A}| = \frac{1}{\binom{n}{[n/2]}} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{[n/2]}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1,$$
   donc
   $$\boxed{|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{[n/2]}.}$$
19. Soit $A \subset B \subset \{1,\dots,n\}$, $A \neq B$, alors
   $$\begin{aligned}
   s_B - s_A &= \sum_{j \in B} v_j - \sum_{j \in B^c} v_j - \sum_{j \in A} v_j + \sum_{j \in A^c} v_j \\
   &= \left(\sum_{j \in A} v_j + \sum_{j \in B \setminus A} v_j \right) - \sum_{j \in B^c} v_j - \sum_{j \in A} v_j + \left(\sum_{j \in B^c} v_j + \sum_{j \in A^c \setminus B^c} v_j \right) \\
   &= \sum_{j \in B \setminus A} v_j + \sum_{j \in A^c \setminus B^c} v_j \geq 2
   \end{aligned}$$
   car $B \setminus A \neq \emptyset$, $A^c \setminus B^c \neq \emptyset$ et $v_j \geq 1$.

20. • Soit $\phi : \omega \in \Omega_{1,n} \mapsto \{i \in [\![1,n]\!] : \omega_i = 1\}$. Il est clair que ϕ est une bijection de $\Omega_{1,n}$ sur $\mathcal{P}([\![1,n]\!])$.
• Soit $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{P}([\![1,n]\!]) : s_X \in J\}$.
Soit A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Si $A \subset B$, alors dans la question précédente, $s_B - s_A \geq 2$, ce qui est impossible car $s_A \in J$, $s_B \in J$ et J est un intervalle ouvert de longueur 2 (donc, pour tout $x, y \in J$, $|x-y| < 2$).
Si $B \subset A$, par symétrie des rôles de A et de B, on obtient la même absurdité.
D'où, par l'absurde, A n'est pas inclus dans B et B n'est pas inclus dans A, donc $\mathcal{A}$ est une anti-chaine.
• Enfin, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\langle L_1^{(n)}, v\rangle = s_{\phi(L_1^{(n)}(\omega))},$$

donc

$$\begin{aligned}
P(\langle L_1^{(n)}, v\rangle \in J) = P(L_1^{(n)} \in \phi^{-1}(\mathcal{A})) = P\left(\bigcup_{l \in \phi^{-1}(\mathcal{A})} (L_1^{(n)} = l)\right) \\
&= \sum_{l \in \phi^{-1}(\mathcal{A})} P(L_1^{(n)} = l) = \sum_{l \in \phi^{-1}(\mathcal{A})} \frac{1}{2^n} \\
&= |\phi^{-1}(\mathcal{A})| \frac{1}{2^n} = |\mathcal{A}| \frac{1}{2^n} \quad \text{(car } \phi \text{ est une bijection)} \\
&\leq \binom{n}{[n/2]} \frac{1}{2^n} \quad \text{(d'après la question 18)} \\
&\leq \frac{2^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ pour } n \text{ assez grand} \quad \text{(d'après la question 2).}
\end{aligned}$$

• Si l'on suppose seulement que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $|v_j| \geq 1$, alors le raisonnement précédent reste valable en changeant uniquement ϕ en

$$\phi : \omega \in \Omega_{1,n} \mapsto \{i \in [\![1,n]\!] : \omega_i l_i > 0\}.$$

E Universalité

21. Par définition d'un ensemble k-universel,

$$\begin{aligned}
\{L_1^{(n)}(\omega), \dots, L_d^{(n)}(\omega)\} \text{ non } k\text{-universel} \Leftrightarrow \exists (j_1, \dots, j_k) \in [\![1,n]\!]^k : 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n, \exists o \in \omega_{1,n}, \\
\forall i \in [\![1,d]\!], \exists m \in [\![1,k]\!] : M_{i,j_m}(\omega) \neq o_{1,j_m}.
\end{aligned}$$

On a donc bien l'inclusion souhaitée (et même l'égalité ? !)

$$\left\{\{L_1^{(n)}(\omega), \dots, L_d^{(n)}(\omega)\} \text{ non } k\text{-universel}\right\} \subset \bigcup_{\substack{(j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} \{M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m}\}.$$

22. Par suite,

$$\begin{aligned}
P(\{L_1^{(n)}, \dots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}) &= P\left(\bigcup_{\substack{(j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \bigcup_{\omega \in \Omega_{1,k}} \bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} (M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m})\right) \\
&\leq \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,n\}^k \\ j_1 < \dots < j_k}} \sum_{\omega \in \Omega_{1,k}} P\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} (M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m})\right)
\end{aligned}$$

par sous-additivité de P.
Or, par indépendance des différentes lignes,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=1}^{d} \bigcup_{m=1}^{k} (M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m})\right) &= \prod_{i=1}^{d} P\left(\bigcup_{m=1}^{k} (M_{i,j_m} \neq \omega_{1,j_m})\right) \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left(1 - P\left(\bigcap_{m=1}^{k} (M_{i,j_m} = \omega_{1,j_m})\right)\right) \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \prod_{m=1}^{k} P(M_{i,j_m} = \omega_{1,j_m})\right) \quad \text{(par indépendance des } M_{i,j}\text{)} \\
&= \prod_{i=1}^{d} \left(1 - \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^d,
\end{aligned}$$

donc

$$P(\{L_1^{(n)},\dots,L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}) \leq \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_k)\in\{1,\dots,n\}^k \\ j_1<\dots<j_k}} \sum_{\omega\in\Omega_{1,k}} \left(1-\frac{1}{2^k}\right)^d.$$

Enfin, le terme sommé ne dépend pas de $\omega \in \Omega_{1,k}$, ni de $(j_1,\dots,j_k) \in \{1,\dots,n\}^k$, et comme il y a 2^k termes dans $\displaystyle\sum_{\omega\in\Omega_{1,k}}$ et $\binom{n}{k}$ termes dans $\displaystyle\sum_{\substack{(j_1,\dots,j_k)\in\{1,\dots,n\}^k \\ j_1<\dots<j_k}}$, on a bien

$$P(\{L_1^{(n)},\dots,L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}) \leq \binom{n}{k} 2^k(1-2^{-k})^d.$$

Remarque. Le choix d'un k-uplet de $\{1,\dots,n\}$ vérifiant $j_1 < \dots < j_k$ revient au choix d'une partie à k éléments de $\{1,\dots,n\}$, ce qui explique les $\binom{n}{k}$ termes dans la première somme.

23. Si $d \geq n/2$ et $k \leq \ln n$, alors

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} 2^k(1-2^{-k})^d &\leq 2n^k(1-2^{-k})^d \quad \text{(d'après la question 3)}\\
&= 2n^k \exp\left(d\ln\left(1-\frac{1}{2^k}\right)\right)\\
&\leq 2n^{\ln n}\exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{2^{\ln n}}\right)\right) \quad \text{(par hypothèse sur } k \text{ et } d \text{ et par croissance de exp et ln)}\\
&= 2n^{\ln n}\exp\left(-\frac{n}{2}\frac{1}{2^{\ln n}}\right) \quad \text{(car } \ln(1+x)\leq x \text{ pour tout } x>-1)\\
&= 2\exp\left((\ln n)^2 - \frac{1}{2}n2^{-\ln n}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
2\exp\left((\ln n)^2-\frac{1}{2}n2^{-\ln n}\right) \leq \frac{1}{n} &\Leftrightarrow 2n\exp\left((\ln n)^2-\frac{1}{2}n2^{-\ln n}\right)\leq 1\\
&\Leftrightarrow \exp\left(\ln 2+\ln n+(\ln n)^2-\frac{1}{2}n2^{-\ln n}\right)\leq 1\\
&\Leftrightarrow \ln 2+\ln n+(\ln n)^2-\frac{1}{2}n2^{-\ln n}\leq 0\\
&\Leftrightarrow \ln 2+\ln n+(\ln n)^2-\frac{1}{2}\exp(\ln n-\ln n\ln 2)\leq 0\\
&\Leftrightarrow \ln 2+\ln n+(\ln n)^2-\frac{1}{2}n^{1-\ln 2}\leq 0
\end{aligned}$$

Or, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln 2+\ln n+(\ln n)^2-\frac{1}{2}n^{1-\ln 2} = -\infty$ (car $1-\ln 2>0$), donc, au delà d'un certain rang, on aura :

$$\ln 2+\ln n+(\ln n)^2-\frac{1}{2}n^{1-\ln 2}\leq 0, \text{ et donc } \quad P(\{L_1^{(n)},\dots,L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}) \leq \binom{n}{k}2^k(1-2^{-k})^d \leq \frac{1}{n}.$$

24. Soit $v \in \mathcal{V}^\perp \setminus \{0\}$ et supposons que v a au plus k coordonnées non nulles $(j_1,\dots,j_d)$ avec $1\leq d\leq k$.
Complétons cette famille si besoin en $(j_1,\dots,j_d,\dots,j_k)$.
Posons alors $\omega \in \Omega_{1,n}$ tel que : $\begin{cases} \omega_{1,i} = 1 & \text{si } i \notin \{j_1,\dots,j_d\} \\ \omega_{1,i} = \dfrac{v_i}{|v_i|} & \text{si } i \in \{j_1,\dots,j_d\} \end{cases}$.
Comme $\mathcal{V}$ est k-universel, il existe $u\in\mathcal{V}$ tel que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $u_{j_i} = \omega_{j_i}$.
Mais alors

$$\langle u,v\rangle = \sum_{i=1}^d \underbrace{u_{j_i}}_{=\omega_{1,j_i}=\frac{v_{j_i}}{|v_{j_i}|}} v_{j_i} + \sum_{i\notin\{j_1,\dots,j_d\}} u_i \underbrace{v_i}_{=0} = \sum_{i=1}^d \frac{v_{j_i}^2}{|v_{j_i}|} > 0 (\text{car } v_{j_i}>0 \text{ pour tout } i\in[\![1,d]\!]),$$

ce qui est exclu car $v\in\mathcal{V}^\perp$ et $u\in\mathcal{V}$, donc $\langle u,v\rangle = 0$.
Par l'absurde, v a au moins $k+1$ coordonnées non nulles.

25. Soit $v \in \mathcal{V}^\perp \setminus \{0\}$ à coordonnées entières.
• Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$L_1^{(n)}(\omega) \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{V}) \Rightarrow \langle L_1^{(n)}(\omega), v\rangle = 0,$$

donc

$$P\left(L_1^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{V})\right) \leq P(\langle L_1^{(n)}, v\rangle = 0).$$

Notons $v_{i_1}, \ldots, v_{i_c}$ les coordonnées non nulles de v, avec $k+1 \leq c \leq n$ (d'après la question 24). Alors

$$\begin{aligned}
P(\langle L_1^{(n)}, v\rangle = 0) &= P\left(\langle (M_{1,i_1}^{(n)}, \ldots, M_{1,i_c}^{(n)}), (v_{i_1}, \ldots, v_{i_c})\rangle = 0\right)\\
&= P\left(\langle (M_{1,i_1}^{(n)}, \ldots, M_{1,i_c}^{(n)}), (v_{i_1}, \ldots, v_{i_c})\rangle \in]-1,1[\right)\\
&\leq \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

d'après la question 20 avec $J =]-1,1[$ et pour c assez grand, ce qui est le cas dès que k est assez grand.

26. • $n - t_n \geq n/2 \Leftrightarrow 1 - t_n/n \geq 1/2$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - t_n/n = 1$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$1 - t_n/n \geq 1/2 \Leftrightarrow n - t_n \geq n/2.$$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)})\right) &= P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)}) \cap (\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel})\right)\\
&\quad + P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)}) \cap (\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \ k\text{-universel})\right)\\
&\leq P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)}) \cap (\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel})\right)\\
&\quad + P\left(\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \ k\text{-universel}\right)\\
&= P(\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel}) P_{(\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \text{ non } k\text{-universel})}\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)})\right)\\
&\quad + P\left(\{L_1^{(n)}, \ldots, L_d^{(n)}\} \ k\text{-universel}\right)\\
&\leq 1 \times \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{n} \qquad \text{pour } k \text{ assez grand.}
\end{aligned}$$

Prenons $k = [\ln n]$. Dès que n est assez grand, $k = \ln n$ est assez grand et $k \in [\![1, n]\!]$, donc

$$P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)})\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\ln n}} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{\ln n}}.$$

Par suite, pour n assez grand,

$$\sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)})\right) \leq \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} \frac{2}{\sqrt{\ln n}} = \frac{2(n-1-(n-t_n+1)+1)}{\sqrt{\ln n}} = \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}.$$

F Théorème de Komlós

27. Pour n assez grand,

$$\begin{aligned}
P(\det M^{(n)} = 0) &\leq \sum_{j=1}^{n-1} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)}\right) \qquad \text{(d'après la question 9)}\\
&= \sum_{j=1}^{n-t_n} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)}\right) + \sum_{j=n-t_n+1}^{n-1} P\left(L_{j+1}^{(n)} \in \mathrm{Vect}\,(L_1^{(n)}, \ldots, L_j^{(n)}\right)\\
&\leq \sum_{j=1}^{n-t_n} 2^{j-n} + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} \qquad \text{(d'après les questions 12 et 26)}\\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1-2^{n-t_n}}{1-2} + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}} \qquad \text{(somme géométrique de raison } 2 \neq 1)\\
&= \frac{1}{2^{t_n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}.
\end{aligned}$$

En prenant $t_n = \left[\sqrt{\sqrt{\ln n}}\right]$ pour n assez grand, on a

$$\underbrace{\frac{1}{2^{t_n-1}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2t_n}{\sqrt{\ln n}}}_{\to 0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(\det M^{(n)} = 0) = 0$.