Mines 2015 - Math1 PSI
Un corrigé

1 Préliminaires

1. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$, l'unique choix convenable de c est
$$c = e^{-\lambda}$$

2. On note tout d'abord que $P = (1-p, p, 0, \dots)$ et $Q = (q, 1-q, 0, \dots)$ sont bien des éléments de $\mathcal{P}$ et que $\text{dist}(P,Q)$ est donc bien définie. Soit $A \subset \mathbb{N}$; distinguons les cas.
   - Si $A \cap \{0,1\} = \emptyset$, alors $|P(A) - Q(A)| = 0$.
   - Si $A \cap \{0,1\} = \{0\}$ ou $A \cap \{0,1\} = \{1\}$, alors $|P(A) - Q(A)| = |p-q|$.
   - Sinon $A \cap \{0,1\} = \{0,1\}$ et $|P(A) - Q(A)| = 0$.

   On en déduit que $\text{dist}(P,Q) \le |p-q|$ et le majorant étant atteint pour une partie A,
$$\text{dist}(P,Q) = \max_{A \subset \mathbb{N}} |P(A) - Q(A)| = |p-q|$$

3. Pour $f \in calF$, on choisit de noter $\|f\|_\infty = \max\{|f(n)|,\ n \in \mathbb{N}\}$ (qui existe puisque f est bornée). On a alors, pour $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |f(n)p_n| \le \|f\|_\infty p_n$$
Le majorant étant le terme général d'une série convergente (de somme 1), $\sum (f(n)p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente et donc convergente.

2 Caractérisation

4. Soit $f \in \mathcal{F}$. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |nf(n)p_n^{(\lambda)}| \le n\|f\|_\infty \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda \|f\|_\infty \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$
Le majorant étant le terme général d'une série (exponentielle, de référence) convergente, la série $\sum(nf(n)p_n^{(\lambda)})$ est absolument convergente et donc convergente.

5. On a (comme ci-dessus, et le terme pour $n=0$ est nul)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$
On effectue un changement de variable ($k = n-1$) pour obtenir
$$\sum_{n=0}^{+\infty} nf(n)p_n^{(\lambda)} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k+1) \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1)p_n^{(\lambda)}$$

6. On note f_k la fonction telle que $f_k(k) = 1$ et $\forall n \ne k,\ f_k(n) = 0$, c'est à dire $f_k = \mathbf{1}_{\{k\}}$. En appliquant la proprité avec f_k, pour $k \ge 1$, on obtient
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ kq_k = \lambda q_{k-1}$$
Montrons par récurrence que
$$\forall k \in \mathbb{N},\ q_k = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$$

- Initialisation : c'est immédiat pour $k = 0$ ($q_0 = q_0$).
- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que la relation soit vraie jusqu'au rang $k-1$. On a alors

$$q_k = \frac{\lambda}{k} q_{k-1} = \frac{\lambda}{k} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} q_0 = \frac{\lambda^k}{k!} q_0$$

ce qui prouve le résultat au rang k.

Avec la question **1**, la condition $Q \in \mathcal{P}$ implique $q_0 = e^{-\lambda}$ et on a donc

$$Q = P_\lambda$$

3 Résolution de l'équation de Stein

7. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On peut définir par récurrence une fonction f_a sur $\mathbb{N}$ en posant $f_a(0) = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_a(n+1) = \frac{1}{\lambda}\left(n f_a(n) + \tilde{h}(n)\right)$$

Par construction, $f_a \in \mathcal{S}_h$ et on a donc trouvé une infinité d'éléments dans $\mathcal{S}_h$. *Remarque : on les a en fait trouvés tous.*

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

- Initialisation : pour $n = 1$, la relation se lit $\lambda f(1) = \tilde{h}(0)$ et elle est vérifiée (c'est la relation (2) pour $n = 0$).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat soit vrai au rang n. La relation (2) donne alors

$$\lambda f(n+1) = n f(n) + \tilde{h}(n) = \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{n!}{\lambda^n} \tilde{h}(n) \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$ en divisant par λ.

8. Commençons par une remarque. On pose $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$ en sorte que $\tilde{h}(n) = h(n) - \ell_h$. On a aussi

$$\ell_h = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

$\tilde{h}$ étant bornée (somme d'une fonction bornée et d'une constante), $\sum(\tilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!})$ est convergente et on a (les termes écrits existant)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - \ell_h \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda \ell_h - \ell_h e^\lambda = 0$$

ce qui donne

$$\tilde{h}(0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Prouvons maintenant le résultat demandé par récurrence sur n.

- Initialisation : la relation (2) pour $n = 0$ donne

$$\lambda f(1) = \tilde{h}(0) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}$$

ce qui donne le résultat au rang 1.

- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. On a alors

$$\lambda f(n+1) = nf(n) + \tilde{h}(n) = -\frac{n!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} + \tilde{h}(n)$$

Le terme pour $k = n$ de la somme s'élimine avec le second terme du membre de droite et on obtient le résultat au rang $n+1$.

9. Si $f \in \mathcal{S}_h$ on a alors (majoration grossière avec la question précédente, on vérifie bien sûr que les termes écrits existent)

$$\forall n \geq 1,\ |f(n)| \leq \|\tilde{h}\|_\infty \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Le changement de variable $j = k - n$ donne

$$\forall n \geq 1,\ |f(n)| \leq \frac{\|\tilde{h}\|_\infty}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^j \frac{n!}{(j+n)!}$$

En remarquant que $\frac{n!}{(j+n)!} = \frac{1}{(n+1)\dots(n+j)} \leq \frac{1}{j!}$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ |f(n)| \leq \frac{\|\tilde{h}\|_\infty}{n} e^\lambda$$

ce qui montre que f est bornée avec

$$\|f\|_\infty \leq \max\left(|f(0)|, \frac{\|\tilde{h}\|_\infty}{n} e^\lambda\right)$$

4 Propriété de Lipschitz

10. En reprenant la notation $\ell_h = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) p_k^{(\lambda)}$, on a $\ell_h = p_m^{(\lambda)}$ et donc

$$\widetilde{h}(k) = h(k) - p_m^{(\lambda)}$$

En reprenant la formule (3), il vient

$$\forall n \geq 1,\ f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

Si $n \leq m$, tous les termes de la première somme du membre de droite sont nuls et ainsi

$$\forall n \in [|1, m|],\ f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$

11. En utilisant la relation (4), on obtient de même

$$\forall n \geq 1,\ f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left(\sum_{k=n}^{\infty} h(k) \frac{\lambda^k}{k!} - p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

Si $n > m$, tous les termes de la première somme sont nuls et ainsi

$$\forall n > m,\ f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall n \in [|1, m|],\ f_m(n) \leq 0 \ \text{ et } \ \forall n \geq m+1,\ f_m(n) \geq 0$$

12. On a $\Delta f_m(n) = f_m(n+1) - f_m(n)$ et on distingue deux cas.
   - Si $n \in [|1, m-1|]$, on peut utiliser la formule de la question **10** pour les deux termes et on obtient
$$\Delta f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n+1}} p_m^{(\lambda)} \left[(\lambda - n) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \right]$$
Pour montrer que cette quantité est négative, il suffit de montrer que le crochet est négatif, c'est à dire aussi que
$$\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \frac{\lambda^n}{(n-1)!} + n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$
ce qui revient à dire (changement d'indice à gauche et regroupement des termes à droite) que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leq n \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$
Nous montrons maintenant que cette inégalité a bien lieu en remarquant que $\frac{n}{k!} \geq \frac{1}{(k-1)!}$ pour $k \in [|1, n|]$ et que donc
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \leq n \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \leq n \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!}$$
   - Si $n > m$, on utilise cette fois la formule de la question **11** pour obtenir
$$\Delta f_m(n) = p_m^{(\lambda)} \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \left[\left(\frac{n}{\lambda} - 1 \right) \sum_{k \geq n+1} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{\lambda^n}{n!} \right]$$
Pour montrer que cette quantité est négative, il suffit de montrer que le crochet est négatif, c'est à dire aussi que
$$n \sum_{k \geq n+1} \frac{\lambda^k}{k!} \leq \lambda \sum_{k \geq n} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k \geq n+1} \frac{\lambda^k}{(k+1)!}$$
Ceci est vrai car $\frac{n}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)!}$ quand $k \geq n$.

On a finalement prouvé que
$$\forall n \notin \{0, m\}, \ \Delta f_m(n) \leq 0$$

13. On a $\Delta f_0(0) = f_0(1) - f_0(0)$. $f_0(1)$ s'obtient avec la question **11** et vaut $\frac{0!}{\lambda^1} p_0^{(\lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$. On a ainsi
$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} - f_0(0)$$
Pour $m > 0$, $\Delta f_m(m)$ est la différence d'un terme correspondant à la question **11** ($n = m+1$) et d'un autre correspondant à la question **10** ($n = m$). On obtient
$$\Delta f_m(m) = \frac{m!}{\lambda^{m+1}} p_m^{(\lambda)} \sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{(m-1)!}{\lambda^m} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!}$$
Comme $\frac{m!}{\lambda^{m+1}} p_m^{(\lambda)} = e^{-\lambda}/\lambda$, ceci donne
$$\Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k \geq m+1} \frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

Il suffit de faire rentrer $\frac{\lambda}{m}$ et de changer d'indice pour conclure que

$$\Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k\geq m+1}\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

14. On suppose ici que $m > 0$. Pour $k \in [|1, m|]$, on a $\frac{k}{m} \leq 1$ et la question précédente donne

$$\Delta f_m(m) \leq \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k\geq m+1}\frac{\lambda^k}{k!} + \frac{\lambda}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}(e^{\lambda} - 1) = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Si $n \notin \{0, m\}$, on a aussi $\Delta f_m(n) \leq 0 \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. On a donc un majorant de $\Delta f_m(n)$ pour tout n et donc un majorant de la borne supérieure :

$$\sup_{n\geq 1}\Delta f_m(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

15. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $g = h + c$. On a

$$\tilde{g}(n) = g(n) - \sum_{k=0}^{\infty} g(k)p_k^{(k)} = h(n) + c - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(k)} - c\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(k)}}_{=1} = \tilde{h}(n)$$

D'après cette remarque et les formules (3), les valeurs sur $\mathbb{N}^*$ des éléments de $\mathcal{S}_h$ et $\mathcal{S}_g$ sont égales. Comme les valeurs en 0 ne changent pas l'appartenance à $\mathcal{S}_h$ ou $\mathcal{S}_g$, les ensembles sont donc égaux. En particulier,

$$\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h^+}$$

16. Travaillons à $n \geq 1$ fixé. Avec la question **10**, (on majore la somme partielle de la série exponentielle par la somme infinie ce qui est licite puisque les termes sont positifs)

$$\forall m \geq n,\ |f_m(n)| \leq \frac{(n-1)!}{\lambda^n}p_m^{(\lambda)}e^{\lambda}$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente ($\sum(p_m^{(\lambda)})$ converge) et $\sum(f_m(n))_{m\geq 0}$ est donc convergente. Or, h_+ est, comme h, bornée, et

$$\forall m \geq 0,\ |h_+(m)f_m(n)| \leq \|h_+\|_\infty |f_m(n)|$$

Finalement, $\sum(h_+(m)f_m(n))_{m\geq 0}$ est une série convergente.

17. Soit f la fonction proposée. On a (pas de souci pour regrouper des séries convergentes) pour tout $n \geq 0$,

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)\left(\lambda f_m(n+1) - nf_m(n)\right)$$

Par définition de $f_m \in \mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$, on a $\lambda f_m(m+1) - nf_m(m) = 1 - p_m^{(\lambda)}$ et $\lambda f_m(n+1) - nf_m(n) = -p_m^{(\lambda)}$ si $n \neq m$. Ainsi,

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h_+(n) - \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m)p_m^{(\lambda)}$$

ce qui signifie exactement que f appartient à $\mathcal{S}_{h_+}$ lui même égal à $\mathcal{S}_h$ (question **15**).

18. Toutes les fonctions de $\mathcal{S}_h$ prennent les mêmes valeurs sur $\mathbb{N}^*$. Comme on vient de trouver un élément de $\mathcal{S}_h$, on peut dire que pour tout élément de $\mathcal{S}_h$, on a

$$\forall n \geq 1,\ f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m)(f_m(n+1) - f_m(n)) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m)\Delta f_m(n)$$

Comme h_+ est à valeurs positives et que Δf_m est négatif sauf peut-être pour $m = n$, on a alors

$$\forall n \geq 1,\ f(n+1) - f(n) \leq h_+(n)\Delta f_n(n)$$

La question **14** permet de majorer $\Delta f_n(n)$ par $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$. Comme h_+ est à valeurs positive, on peut multiplier l'inégalité par $h_+(n)$ sans changer le sens de l'inégalité et obtenir

$$\forall n \geq 1,\ f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} h_+(n)$$

Enfin, $h_+ \leq \sup h - \inf h$ et on peut multiplier par $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \geq 0$ pour conclure que

$$\forall n \geq 1,\ f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbb{N}} h(k) \right)$$

5 Application probabiliste

19. Soit $\omega \in \Omega$ (l'univers). Dire que deux variables Y et Z sont égales, c'est dire que pour tout $j \in Y(\Omega) \cup Z(\Omega)$ les événements $Y = j$ et $Z = j$ sont les mêmes. Soit donc $j \in Y(\Omega) \cup Z(\Omega)$.
    - Supposons que $\omega \in (X_k.f(S) = j)$. On a alors $X_k(\omega).f(S)(\omega) = j$. Comme X_k est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on est amenés à distinguer deux cas.
      Si $X_k(\omega) = 1$ alors $f(X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)) = j$. On a donc $f(1 + W_k(\omega)) = j$ et finalement $\omega \in (X_k.f(1 + W_k) = j)$.
      Sinon, $X_k(\omega) = 0$ et donc $j = 0$ et on a encore $\omega \in (X_k.f(1+W_k) = j)$ puisque $X_k(\omega).f(1+W_k(\omega)) = 0$.
    - Réciproquement, supposons $\omega \in (X_k.f(1 + W_k) = j)$. La même distinction de cas amène à $\omega \in (X_k.f(S) = j)$.

    Comme les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes mutuellement, toute fonction des $X_i,\ i \neq k$ est indépendante de X_k. C'est en particulier le cas de W_k et de $f(W_k)$. On a donc

    $$\mathbb{E}(f(W_k)X_k) = \mathbb{E}(f(W_k))\mathbb{E}(X_k) = r_k\mathbb{E}(f(W_k))$$

    puisque l'espérance d'une variable de Bernoulli de paramètre p vaut p.

20. Fixons $k \in [|1, n|]$. On a alors (formule des probabilités totales avec le système complet d'événement $((X_k = 0), (X_k = 1))$)

    $$\mathbb{P}(S = j) = (1 - r_k)\mathbb{P}(X_k = j) + r_k\mathbb{P}(W_k = j - 1)$$

    puisque $\mathbb{P}(S = j|X_k = 0) = \mathbb{P}(W_k = j)$ et $\mathbb{P}(S = j|X_k = 1) = \mathbb{P}(W_k = j - 1)$. On en déduit (par utilisation de la formule de transfert) que

    $$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(S+1)) &= \sum_j \mathbb{P}(S = j)f(j+1) \\ &= (1 - r_k)\sum_j f(j+1)\mathbb{P}(W_k = j) + r_k \sum_j f(j+1)\mathbb{P}(W_k = j-1) \\ &= (1 - r_k)\mathbb{E}(f(1 + W_k)) + r_k\mathbb{E}(f(2 + W_k)) \end{aligned}$$

On multiplie ces égalités par r_k et on somme pour obtenir

$$\lambda\mathbb{E}(f(S+1)) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2(\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k))) + \sum_{k=1}^{n} r_k\mathbb{E}(f(1+W_k))$$

On interprète $r_k\mathbb{E}(1+W_k) = \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(1+W_k) = \mathbb{E}(X_k f(1+W_k)) = \mathbb{E}(X_k f(S))$ (question précédente) pour avoir

$$\lambda\mathbb{E}(f(S+1)) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2(\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k))) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k f(S))$$

Par linéarité de l'espérance, ceci devient

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2(\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k)))$$

Il reste à écrire que $r_k^2(\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(f(1+W_k))) = r_k(\mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(f(2+W_k)) - \mathbb{E}(X_k)\mathbb{E}(f(1+W_k)))$ et à utiliser l'indépendance de X_k et W_k (et encore la linarité de l'espérance) pour conclure que

$$\mathbb{E}(\lambda f(S+1) - Sf(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k\mathbb{E}\left(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\right)$$

Remarque : l'hypothèse $f \in \mathcal{S}_h$ ne sert à rien.

21. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Par définition de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$, on a

$$\forall j,\ \lambda f_A(j+1) - jf_A(j) = \mathbf{1}_A(j) - \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(k)p_k^{(\lambda)}$$

Par ailleurs, par formule de transfert,

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \sum_j \left(\lambda f_A(j+1) - jf_A(j)\right)\mathbb{P}(S=j)$$

Combinons les formules :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) &= \sum_j \mathbf{1}_A(j)\mathbb{P}(S=j) - \sum_{j,k} \mathbf{1}_A(k)p_k^{(\lambda)}\mathbb{P}(S=j) \\
&= \sum_{j\in A} \mathbb{P}(S=j) - \sum_k \mathbf{1}_A(k)p_k^{(\lambda)} \\
&= \sum_{j\in A} \mathbb{P}(S=j) - \sum_{k\in A} p_k^{(\lambda)}
\end{aligned}$$

Si on revient à la définition de la distance définie par l'énoncé, on obtient donc

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) = \sup_{A\subset\mathbb{N}} |\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S))|$$

22. Soit $A \subset \mathbb{N}$. Avec la question **20**, on a (toujours avec l'indépendance de X_k et W_k)

$$\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - Sf_A(S)) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2\mathbb{E}\left(f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)\right)$$

Avec la formule (5) (et comme $\mathbf{1}_A$ peut prendre les valeurs 0 ou 1) on a

$$|f_A(W_k+2) - f_A(W_k+1)| \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$$

Il reste à combiner le tout pour conclure que

$$|\mathbb{E}(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S))| \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2$$

et comme le majorant est indépendant de A, la question précédente donne enfin

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S), P_\lambda) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2$$