# Épreuve de Mathématiques 2 PC

Durée 3 h

**Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.**

---

## L'usage de calculatrices est interdit.

### AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.



**Tournez la page S.V.P.**

**Question préliminaire**

Soit $a$ un réel non nul.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction qui à tout $x$ réel associe le nombre complexe $\dfrac{1}{x+\mathrm{i}\,a}$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.

**Dans tout le problème, $\lambda$ est un réel strictement positif**

Pour tout réel $\alpha$ et tout réel $\lambda>0$, on définit l'application $f_{\alpha,\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t\mapsto t^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$.

**1.**

**1.1** Déterminer l'ensemble $A$ des couples $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\lim\limits_{t\to 0, t>0} f_{\alpha,\lambda}(t)$ existe.

**1.2** Déterminer l'ensemble $B$ des couples $(\alpha,\lambda)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ tels que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

**2.** Montrer que pour tout $x$ réel, les fonctions $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\,\cos(tx)}{\sqrt{t}}$ et $t\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{-t}\,\sin(tx)}{\sqrt{t}}$ sont intégrables sur $]\,0,+\infty[$.

On définit alors les deux fonctions $U$ et $V$ sur $\mathbb{R}$ par : $U(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\cos(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $V(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}\,\sin(tx)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

**3.** Etudier les parités des fonctions $U$ et $V$.

**4.** A l'aide d'un changement de variable que l'on justifiera soigneusement, calculer $U(0)$.

On pourra utiliser sans démonstration le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**5.** Pour tout réel $x$, on pose $W(x)=U(x)+\mathrm{i}\,V(x)$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.

**5.1** Montrer que la fonction $W$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

**5.2** Démontrer que la fonction $W$ est solution d'une équation différentielle $(E)$ linéaire du premier ordre que l'on explicitera et que l'on ne cherchera pas à résoudre ici. (On pourra utiliser une intégration par parties)

**5.3** En déduire que $U$ et $V$ sont de classe $C^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

**5.4** Prouver que l'on a pour tout réel $x$ : $\begin{cases} U'(x)=-\dfrac{V(x)+x\,U(x)}{2(1+x^2)} \\ V'(x)=\dfrac{U(x)-x\,V(x)}{2(1+x^2)}\end{cases}$

**6.** Pour tout réel $t$, on note $g(t)=f_{-1/2,\lambda}(t)\,\sin(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}\,\sin(t)$. Montrer que $g$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

**7.** On définit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $a_n=(-1)^n\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}g(t)\,\mathrm{d}t$.

**7.1** Prouver que pour tout entier naturel $n$, $a_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+n\pi)}}{\sqrt{t+n\pi}}\,\sin(t)\,\mathrm{d}t$

**7.2** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

**7.3** Prouver enfin que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell$ que l'on déterminera.

**8.** **8.1** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\,a_k$ converge. On note $S$ sa somme.

**8.2** Montrer que $S > 0$.

**8.3** En utilisant la somme partielle d'ordre $N$ de la série $\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k a_k$, montrer que l'on a : $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k$

**9.** A l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout $x > 0$, $V(x) > 0$.

**10.** Pour tout réel $x > 0$, on note $R(x) = [U^2(x) + V^2(x)]^{1/2}$ et $T(x) = \arctan\left(\dfrac{U(x)}{V(x)}\right)$

**10.1** Prouver que les fonctions $R$ et $T$ sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

**10.2** Montrer que les fonctions $R$ et $T$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**10.3** Démontrer alors que $R$ et $T$ sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de deux équations différentielles linéaires du premier ordre.

**10.4** Résoudre ces équations différentielles sur $\mathbb{R}$.

**10.5** En déduire une expression sur $\mathbb{R}_+$ de $R$ et de $T$ à l'aide de fonctions usuelles.

**11.** Donner des expressions de $U(x)$ et de $V(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**12.** Retrouver les résultats obtenus à la question précédente en résolvant l'équation différentielle $(E)$ obtenue à la question **5.2**.

**13.** Pour tout entier naturel $n$ et tout réel $x$, on pose $U_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \cos^n(xt)\,\mathrm{d}t$ et $V_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}} \sin^n(xt)\,\mathrm{d}t$.

**13.1** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $U_2(x)$ et $V_2(x)$ à l'aide de $U(x)$ et $V(x)$.

**13.2** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n(x)$.

FIN DE L'ÉPREUVE

IMPRIMERIE NATIONALE – 19 1116 – D'après documents fournis