Corrigé de E3A 2019 PC math 2

Corrigé écrit par Nathalie Mercier (nathalie.mercier@prepas.org) et Claude Morin (claudio.morin@prepas.org)

Question préliminaire :

En multipliant par l'expression conjuguée on obtient :

$$\int \frac{1}{x+ia} dx = \int \frac{x-ia}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+a^2} dx - \frac{i}{a} \int \frac{1}{1+(x/a)^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) - i \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x+ia} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) - i \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.}$$

1.1 Au voisinage de 0 on a : $f_{\alpha,\lambda}(t) = t^\alpha e^{-\lambda t} \sim t^\alpha$.

Si $\alpha > 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = 0$

Si $\alpha = 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = 1$

Si $\alpha < 0$: $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_{\alpha,\lambda}(t) = +\infty$

L'ensemble des couples (α, λ) tels que la limite est réelle est donc $\boxed{A = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*}$.

1.2 * $f_{\alpha,\lambda} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

* Étude en 0 : $f_{\alpha,\lambda}(t) \sim_0 \frac{1}{t^{-\alpha}}$ entraîne que $\int_0^1 f_{\alpha,\lambda}(t) dt$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$.

* Étude en $+\infty$: comme $\lambda > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\alpha+2} e^{-\lambda t} = 0$ donc $f_{\alpha,\lambda}(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

On en déduit que $\int_1^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t) dt$ converge pour tout α .

L'ensemble des couples (α, λ) tels que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_{\alpha,\lambda}(t) dt$ converge est donc $\boxed{B =]-1, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*}$.

2. * Les deux fonctions considérées sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

* De $\left| \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2},1}(t)$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$ puisque $-\frac{1}{2} > -1$, on déduit que $t \mapsto \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **1.2** et les critères de comparaison.

* De même, $\left| \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ entraîne que $t \mapsto \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{t \mapsto \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} \text{ et } t \mapsto \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} \text{ sont intégrables sur }]0, +\infty[.}$$

3. Puisque la fonction cosinus est paire, la fonction définie par $U(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \cos(tx)}{\sqrt{t}} dt$ est paire.

Puisque la fonction sinus est impaire, la fonction définie par $V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} dt$ est impaire.

4. La fonction définie par $\varphi(u) = u^2$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. On peut donc effectuer le changement de variable $t = \varphi(u) = u^2$ dans l'intégrale convergente $U(0)$:

$$U(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} 2u du = \sqrt{\pi} \text{ avec le résultat admis par l'énoncé : } \boxed{U(0) = \sqrt{\pi}}.$$

$$5.1 \quad W(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}(\cos(tx) + i \sin(tx))}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}} dt.$$

Appliquons le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre. On pose $f(x, t) = \frac{e^{-t+ixt}}{\sqrt{t}}$.

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $|f(x, t)| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = f_{-\frac{1}{2}, 1}(t)$ avec $-\frac{1}{2} > -1$ (question 1.2).
- ★ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = i\sqrt{t}e^{-t+ixt}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ★ Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right| = |i\sqrt{t}e^{-t+ixt}| = \sqrt{t}e^{-t} = f_{\frac{1}{2}, 1}(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\frac{1}{2} > -1$, question 1.2).

On en déduit que la fonction W est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $W'(x) = \int_0^{+\infty} i\sqrt{t}e^{-t+ixt} dt$.

$$5.2 \quad \text{On intègre par parties en posant } u'(t) = e^{-t+ixt} \text{ et } v(t) = i\sqrt{t}, \text{ d'où } u(t) = \frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} \text{ et } v'(t) = \frac{i}{2\sqrt{t}}.$$

u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$|u(t)v(t)| = \left| \frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} i\sqrt{t} \right| = \frac{e^{-t}}{|-1+ix|} \sqrt{t}$ a pour limite 0 en 0 et aussi en $+\infty$ (par croissance comparée de $\sqrt{t}$ et e^t).

On peut donc écrire $W'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t+ixt} i\sqrt{t} dt = \left[\frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} i\sqrt{t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t+ixt}}{(-1+ix)} \frac{i}{2\sqrt{t}} dt$

On en déduit $W'(x) = \frac{-i}{2(-1+ix)} W(x) = \frac{-1}{2(x+i)} W(x)$.

W est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $W'(x) + \frac{1}{2(x+i)} W(x) = 0$.

5.3 La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+i}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

On montre par récurrence sur n que W est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On l'a montré pour $n = 1$.

Si on suppose W de classe $\mathcal{C}^n$ pour un entier n , l'égalité $W'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} W(x)$ montre que W' est aussi de classe $\mathcal{C}^n$, donc W est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

On a montré que W est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout n , donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

U et V désignant les parties réelle et imaginaire de W , U et V sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$5.4 \quad U'(x) + iV'(x) = W'(x) = \frac{-W(x)}{2(x+i)} = -\frac{(x-i)(U(x) + iV(x))}{2(x^2+1)} = -\frac{xU(x) + V(x) + i(-U(x) + xV(x))}{2(x^2+1)}.$$

On en déduit en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\left[U'(x) = -\frac{xU(x) + V(x)}{2(x^2+1)} \right] \text{ et } \left[V'(x) = \frac{U(x) - xV(x)}{2(x^2+1)} \right] \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

6. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $|g(t)| \leq f_{-\frac{1}{2}, \lambda}(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ par la question 1.2 ($-\frac{1}{2} > -1$).

g est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.1 Effectuons le changement de variable affine $u = n\pi + t$ dans l'intégrale qui définit a_n :

$$a_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-\lambda u} \sin(u) \, du = (-1)^n \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{n\pi+t}} e^{-\lambda(n\pi+t)} \sin(n\pi+t) \, dt.$$

Puisque $\sin(n\pi+t) = (-1)^n \sin(t)$ on a bien $a_n = \int_0^\pi \frac{e^{-\lambda(n\pi+t)}}{\sqrt{n\pi+t}} \sin(t) \, dt$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

7.2 La suite $n \mapsto t + n\pi$ étant croissante, la suite $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{t+n\pi}} \times e^{-(t+n\pi)}$ est décroissante (produit de deux suites positives et décroissantes).

Comme $\sin(t) \geq 0$ quand $0 \leq t \leq \pi$, on en déduit que la suite (a_n) est décroissante.

7.3 Puisque $\lambda(t+n\pi) > 0$ et $0 \leq \sin(t) \leq 1$, on a pour $n > 0$: $0 \leq a_n \leq \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \, dt = \frac{\pi}{\sqrt{n\pi}}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc la suite (a_n) a pour limite $\ell = 0$.

8.1 On applique le théorème spécial des séries alternées.

Si une série $(\sum (-1)^n a_n)$ est telle que la suite (a_n) est positive, décroissante et a pour limite 0, alors la série converge et sa somme S a le signe du premier terme. $(\sum (-1)^n a_n)$ converge.

8.2 Puisque le premier terme a_0 est strictement positif on en déduit par le théorème précédent que $S > 0$.

8.3 $S_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^N \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} g(t) \, dt = \int_0^{(N+1)\pi} g(t) \, dt$ par la relation de Chasles.

Puisque la série converge et que la fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ on peut passer à la limite et obtenir

$$\int_0^{+\infty} g(t) \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = S.$$

9. Pour $x > 0$, le changement de variable affine $u = tx$ définit une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. On a donc $V(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin(tx)}{\sqrt{t}} \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x} \sin(u)}{\sqrt{u/x}} \frac{1}{x} \, du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x} \sin(u)}{\sqrt{u}} \, du$.

On reconnaît l'intégrale $\int_0^{+\infty} g(t) \, dt$ dans laquelle on a posé $\lambda = \frac{1}{x}$. Cette intégrale étant strictement positive d'après la question précédente, on en déduit que $V(x) > 0$ pour $x > 0$.

10.1 Comme $V > 0$, R et T sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus U et V sont continues sur $\mathbb{R}$ (question 5.3).

On sait que $U(0) = \sqrt{\pi}$ d'après la question 4. De plus $V(0) = 0$ (expression de V donnée en question 2).

On en déduit que R est prolongeable par continuité en 0^+ en posant $R(0) = U(0) = \sqrt{\pi}$.

Comme $V(x) > 0$ pour $x > 0$ d'après la question précédente, $\lim_{x \rightarrow 0^+} V(x) = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{U(x)}{V(x)} = +\infty$,

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x) = \frac{\pi}{2}$.

On en déduit que T est prolongeable par continuité en 0^+ en posant $T(0) = \frac{\pi}{2}$.

10.2 $\star$ U et V sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc $U^2 + V^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ car $V(x) > 0$ pour $x > 0$. Par classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient par composition que

R est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ De même, $\frac{U}{V}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $V(x) > 0$ pour $x > 0$. Par classe $\mathcal{C}^1$ de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, on obtient par composition que T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10.3 ★ Dérivons : $R' = \frac{UU' + VV'}{R}$. D'après la question **5.4**, $(UU' + VV')(x) = \frac{-x(U^2(x) + V^2(x))}{2(x^2 + 1)}$.

On en déduit que R vérifie l'équation différentielle : $y'(x) + \frac{x}{2(x^2 + 1)}y(x) = 0$.

★ De même, $T' = \frac{VU' - UV'}{V^2} \frac{1}{1 + (\frac{U}{V})^2} = \frac{VU' - UV'}{U^2 + V^2}$. D'après la question **5.4**, $(VU' - UV')(x) = \frac{-(U^2(x) + V^2(x))}{2(x^2 + 1)}$.

On en déduit que T vérifie l'équation différentielle : $y'(x) = \frac{-1}{2(x^2 + 1)}$.

10.4 ★ D'après le cours, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $y'(x) + \frac{x}{2(x^2 + 1)}y(x) = 0$ sont de la forme $y(x) = K_1 \exp[-\frac{1}{4} \ln(1 + x^2)] = \frac{K_1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}}$, avec $K_1 \in \mathbb{R}$:

$$y(x) = \frac{K_1}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}}.$$

★ Il s'agit d'une primitive connue. On obtient donc comme solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $y'(x) = \frac{-1}{2(x^2 + 1)}$: $y(x) = -\frac{1}{2} \arctan(x) + K_2$, avec $K_2 \in \mathbb{R}$.

10.5 On utilise la question **10.1**.

★ On obtient sur $\mathbb{R}_+$: $R(x) = \frac{R(0)}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}}$, soit : $R(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}}$ pour $x \geq 0$.

★ De même on obtient sur $\mathbb{R}_+$: $T(x) = T(0) - \frac{1}{2} \arctan(x)$, soit : $T(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan(x)$ pour $x \geq 0$.

11 On déduit des expressions de R et T données en question **10** que $U = V \tan(T)$, donc $R^2 = V^2(1 + \tan^2(T))$, et $V^2 = R^2 \cos^2(T)$.

★ Comme $T = \arctan(U/V)$ et $T(0) = \pi/2$, T est à valeurs dans $]-\pi/2, +\pi/2]$ donc $\cos(T) \geq 0$. Comme V et R sont à valeurs positives ou nulles, on en déduit $V = R \cos(T)$ sur $\mathbb{R}^+$.

On obtient alors sur $\mathbb{R}_+$: $V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$.

On remarque que la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, est impaire, et coïncide avec V sur $\mathbb{R}_+$. Or V est impaire.

On en déduit que $V(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}} \sin\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$ pour tout x réel.

★ De $U = V \tan(T)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on déduit : $U(x) = \frac{V(x)}{\tan(\frac{1}{2} \arctan(x))} = \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$, qui est valable aussi pour $x = 0$.

La fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$, est paire, et coïncide avec U sur $\mathbb{R}_+$. U

est paire. On obtient de même que pour V : $U(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1 + x^2)^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{1}{2} \arctan(x)\right)$ pour tout x réel.

12 Résolvons l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène de la question **5.2** :

$$y'(x) + \frac{1}{2(x+i)}y(x) = 0.$$

D'après la question préliminaire, $\int \frac{1}{x+i} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - i \arctan(x) + C$.

On obtient donc les solutions sur $\mathbb{R}$: $y(x) = K \exp \left[-\frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{i}{2} \arctan(x) \right] = \frac{K}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[\frac{i}{2} \arctan(x) \right]$.

Comme $W(0) = \sqrt{\pi}$, on obtient : $W(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[\frac{i}{2} \arctan(x) \right]$ pour tout x réel.

En prenant les parties réelle et imaginaire de W , on retrouve bien les expressions des fonctions U et V obtenues en question **11**.

13 Les existences des U_n et V_n sur $\mathbb{R}$ proviennent du même raisonnement que celui utilisé en question **2**, $f_{-\frac{1}{2},1}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

13.1 Calculons pour tout x réel : $U_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1 + \cos(2xt)}{2} dt = \frac{1}{2}(U(0) + U(2x))$.

De même, $V_2(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1 - \cos(2xt)}{2} dt = \frac{1}{2}(U(0) - U(2x))$.

On obtient $U_2(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} + U(2x))$ et $V_2(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - U(2x))$ pour tout x réel.

13.2 On remarque que les fonctions U_n sont paires, et que $U_n(0) = U(0) = \sqrt{\pi}$.

Soit maintenant $x > 0$ fixé.

On peut écrire $|U_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} h_n(t) dt$ où l'on a posé $h_n(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} |\cos^n(xt)| = f_{-\frac{1}{2},1}(t) |\cos(xt)|^n$.

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite des $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

★ Les fonctions h_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

★ Étudions la convergence simple de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc de la suite $(f_{-\frac{1}{2},1}(t) |\cos(xt)|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ à t fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.

Il s'agit d'une suite géométrique de raison $|\cos(xt)|$, on doit donc distinguer selon que $|\cos(xt)| = 1$ ou $|\cos(xt)| < 1$. Or $|\cos(xt)| = 1$ si et seulement si $t \in (\pi/x)\mathbb{N}^*$. Notons $A = \left\{ \frac{k\pi}{x}, k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

On en déduit que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f_{-\frac{1}{2},1} \mathbb{1}_A$, où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A .

★ La fonction $\mathbb{1}_A$ est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ car sur tout segment elle admet un nombre fini de discontinuités avec existence de limites à gauche et à droite en tout point de discontinuité. La fonction $\mathbb{1}_A$ est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $f_{-\frac{1}{2},1} \mathbb{1}_A$ aussi.

★ Pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ et tout n de $\mathbb{N}$, $|h_n(t)| \leq f_{-\frac{1}{2},1}(t)$. D'après la question **1.2**, $f_{-\frac{1}{2},1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. L'hypothèse de domination est bien vérifiée.

On conclut par le théorème que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f_{-\frac{1}{2},1} \mathbb{1}_A = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = 0$.

Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(0) = \sqrt{\pi}$, et pour tout x réel non nul, $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = 0$.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{\pi} \mathbb{1}_{\{0\}}$.