# E3A2 2018 - Corrigé

## Partie I. Etude de l'équation $(E_a)$

1. Soit $f_a : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln x - ax$.

   $f_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$, $f_a'(x) = \dfrac{1}{x} - a$.

   (a) Si $a \in ]-\infty, 0]$, pour tout $x > 0$, $f_a'(x) > 0$, donc

   | $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|
   | $f_a(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   $f_a$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
   Or $0 \in \mathbb{R}$, donc $(E_a) \Leftrightarrow f_a(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée $\alpha$.
   $f_a(1) = -a \geq 0 = f_a(\alpha)$, $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et 1 et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, donc $1 \geq \alpha$, ie $\alpha \in ]0, 1]$.

   (b) Si $a \in ]0, \frac{1}{e}[$, pour tout $x > 0$, $f_a'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - a > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{a}$. On a donc :

   | $x$ | $0$ | | $1/a$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|---|---|
   | $f_a'(x)$ | | $+$ | $0$ | - | |
   | $f_a(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f_a(1/a)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

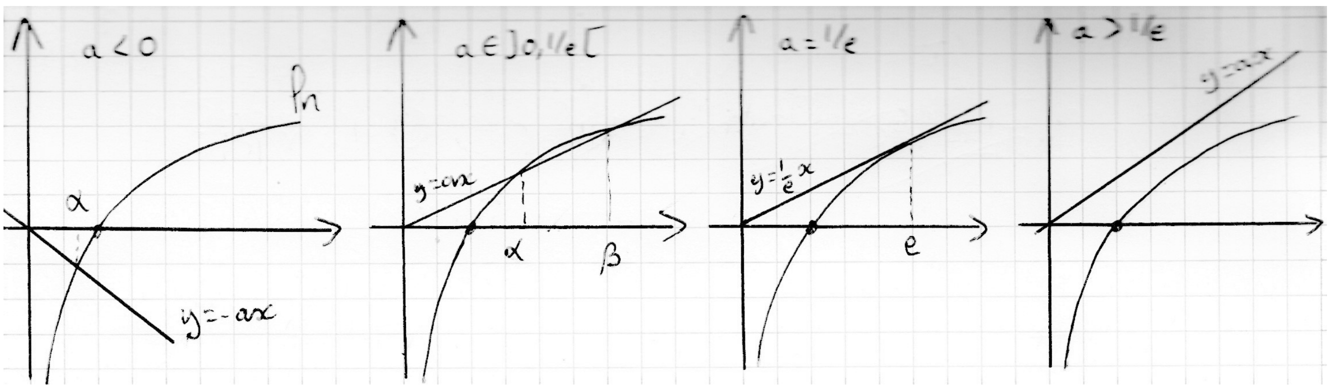
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = -\infty$ par croissances comparées.

   $f_a(1/a) = \ln(1/a) - 1 = -\ln(a) - 1 > 0$
   car $a < 1/e \Rightarrow \ln a < -1$.

   $f_a$ est continue et strictement croissante sur $]0, 1/a]$, donc elle réalise une bijection de $]0, 1/a]$ sur $]-\infty, f_a(1/a)]$.
   Or $0 \in ]-\infty, f_a(1/a)]$ (car $f_a(1/a) > 0$) donc $(E_a) \Leftrightarrow f_a(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, 1/a]$, notée $\alpha$.
   $f_a$ est continue et strictement décroissante sur $]1/a, +\infty[$, donc elle réalise une bijection de $]1/a, +\infty[$ sur $]-\infty, f_a(1/a)[$.
   Or $0 \in ]-\infty, f_a(1/a)[$ (car $f_a(1/a) > 0$) donc $(E_a) \Leftrightarrow f_a(x) = 0$ a une unique solution sur $]1/a, +\infty[$, notée $\beta$.
   Enfin, $\alpha \leq 1/a < e$ et,
   comme $f_a(e) = 1 - ae > 0 = f_a(\beta)$, $f$ est strictement décroissante sur $]1/a, +\infty[$ et $e$ et $\beta \in ]1/a, +\infty[$, on a $e < \beta$, ie $\beta \in ]e, +\infty[$.

   (c) Si $a = \frac{1}{e}$, on a le même tableau de variations qu'à la question précédente, avec cette fois $f_a(1/a) = f_{1/e}(e) = \ln(e) - 1 = 0$, donc l'équation $(E_{1/e})$ a une unique solution : $x = e$.

   (d) Si $a > \frac{1}{e}$, on a le même tableau de variations qu'à la question I1b avec cette fois $f_a(1/a) = -\ln(a) - 1 < 0$, donc $f_a(x) \leq f_a(1/a) < 0$ pour tout $x > 0$, donc l'équation $(E_a)$ n'a aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. 


## Partie II. Etude d'une équation fonctionnelle

1. Suppsons $\varphi$ constante. Alors il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = K$.
   Alors
   $$\big(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)\big) \Leftrightarrow K = K^2 \Leftrightarrow K = 0 \text{ ou } K = 1.$$
   L'équation $(R)$ a donc deux solutions constantes : $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 1$.

2. • Si $\varphi(0) = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(x + 0) = \varphi(x)\underbrace{\varphi(0)}_{=0} = 0$.
   • Si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$, alors, comme $0 \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$.
   • On a donc bien, par double-implication, l'équivalence :
   $$\varphi(0) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0.$$

3. (a) • Comme $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)\varphi(0)$, on a $\varphi(0)^2 = \varphi(0)$, donc $\varphi(0)(\varphi(0)-1) = 0$, donc, comme $\varphi(0) \neq 0$, on a $\varphi(0) = 1$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0.$$

S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = 0$, alors, d'après le calcul précédent, $\varphi\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, et on démontre alors facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.

Comme $\lim \frac{x}{2^n} = 0$, par continuité de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$, donc en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = \varphi(0) = 1$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$.

C'est exclu (par unicité de la limite), donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \neq 0$.

On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(nx) = (\varphi(x))^n$ $(HR_n)$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$, $\varphi(nx) = \varphi(0) = 1$ et $(\varphi(x))^n = (\varphi(x))^0 = 1$, donc on a bien $HR_0$.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $HR_n$ vérifiée.

Alors $\varphi((n+1)x) = \varphi(nx+x) = \varphi(nx)\varphi(x) = (\varphi(x))^n \varphi(x) = (\varphi(x))^{n+1}$.

On a bien $HR_{n+1}$.

**Conclusion :** D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(nx) = (\varphi(x))^n$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 = \varphi(0) = \varphi(-nx+nx) = \varphi(-nx)\varphi(nx),$$

donc $\varphi(-nx) = \dfrac{1}{\varphi(nx)} = (\varphi(x))^{-n}$.

• On a donc bien, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\quad \varphi(nx) = (\varphi(x))^n$.

(c) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $1/m \in \mathbb{R}$, donc, d'après la question précédente appliquée à $x = 1/m$ et $n = m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\varphi(1) = \varphi(m(1/m)) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^m.$$

(d) Soit $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

D'après la question précédente,

$$\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \varphi(1)^{1/m},$$

donc, d'après la question II3b avec $x = 1/m$, on a

$$\varphi\left(\frac{n}{m}\right) = \varphi\left(n\frac{1}{m}\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(\varphi(1)^{1/m}\right)^n = (\varphi(1))^{\frac{n}{m}}.$$

(e) Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après les propriétés de la partie entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$10^n x - 1 < \lfloor 10^n x \rfloor \leq 10^n x.$$

Donc, en divisant par $10^n$, on a

$$x - 10^{-n} < x_n \leq x.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x - 10^{-n} = x$, on a, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(f) $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (\varphi(1))^x = \exp(x \ln(\varphi(1)))$ est continue sur $\mathbb{R}$ (Rq : $\varphi(1) > 0$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) \quad \text{(par continuité de } \varphi \text{ en } x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}\right) \quad \text{(par définition de } x_n) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{\frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}} \quad \text{(d'après la question II3d avec "}n = \lfloor 10^n x \rfloor \in \mathbb{Z}\text{" et } m = 10^n \in \mathbb{N}^*) \\
&= \lim_{n\to+\infty} (\varphi(1))^{x_n} = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) \\
&= g(x) = (\varphi(1))^x \quad \text{(par continuité de } g \text{ en } x)
\end{aligned}$$

## Partie III. Etude d'une suite de polynômes

1. (a) $P_1 = \frac{1}{1!}X(X+1)^0 = X$ et $P_2 = \frac{1}{2!}X(X+2)^1 = \frac{1}{2}X^2 + X$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$P_n(0) = \frac{1}{n!}0(0+n)^{n-1} = 0$$
et $P_0(0) = 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}
P_n'(x) &= \frac{1}{n!}\left((x+n)^{n-1} + (n-1)x(x+n)^{n-2}\right) = \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}\left(x+n+(n-1)x\right) \\
&= \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}n(x+1) = \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+n)^{n-2} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}(x+1)(x+1+n-1)^{n-2} = P_{n-1}(x+1).
\end{aligned}$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, "$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)$" $(HR_n)$

**Initialisation :** Pour $n = 0$, comme $P_0 = 1$, on a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $P_0(x+y) = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} P_k(x)P_{0-k}(y) = P_0(x)P_0(y) = 1 \times 1 = 1$, donc on a bien $HR_0$.

**Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $HR_n$ vérifiée.
Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x+y) - P_{n+1}(y) &= \int_y^{x+y} P_{n+1}'(u)du \\
&= \int_y^{x+y} P_n(u+1)du \quad \text{(d'après la question III2 avec } n+1 \in \mathbb{N}^*\text{)} \\
&= \int_0^{x} P_n(t+1+y)dt \quad \text{(changement de variable affine } u = t+y\text{)} \\
&= \int_0^{x} \sum_{k=0}^{n} P_k(t+1)P_{n-k}(y)dt \quad \text{(d'après } HR_n\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n-k}(y)\int_0^x P_k(t+1)dt\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n-k}(y)\int_0^x P_{k+1}'(t)dt\right) \quad \text{(d'après la question III2 avec } k+1 \in \mathbb{N}^*\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n-k}(y)\left[P_{k+1}(t)\right]_0^x\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n-k}(y)(P_{k+1}(x) - P_{k+1}(0))\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n-k}(y)P_{k+1}(x)\right) \quad (P_{k+1}(0) = 0 \text{ car } k+1 \in \mathbb{N}^*) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} P_j(x)P_{n+1-j}(y) \quad \text{(en posant } j = k+1\text{)}
\end{aligned}$$

donc
$$P_{n+1}(x+y) = P_{n+1}(y) + \sum_{j=1}^{n+1} P_j(x)P_{n+1-j}(y) = \sum_{j=0}^{n+1} P_j(x)P_{n+1-j}(y).$$

On a bien $HR_{n+1}$.
**Conclusion :** D'où, par récurrence,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y).$$

## Partie IV. Retour sur l'équation $(E_a)$

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq -x$,

$$\begin{aligned}(x+n)^{n-1} &= n^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} = n^{n-1}\exp\left((n-1)\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)\\ &= n^{n-1}\exp\left((n-1)\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = n^{n-1}\underbrace{\exp\left(x+o(1)\right)}_{\to e^x\neq 0}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} e^x n^{n-1}.\end{aligned}$$

(b) Formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^*$ fixés.

$$|P_n(x)a^n| = \frac{1}{n!}|x|(x+n)^{n-1}|a|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}|x|e^x n^{n-1}|a|^n = \frac{e^n|x|e^x|a|^n}{n\sqrt{2\pi n}} = \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}.$$

• Si $|a| \leq \frac{1}{e}$, alors $0 \leq \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}} \leq \frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{n^{3/2}}$.
Or, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1}\frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}$, puis $\sum_{n\geq 1}|P_n(x)a^n|$ convergent, donc $\sum P_n(x)a^n$ converge absolument. • Si $|a| > \frac{1}{e}$, alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}} = +\infty$ par croissances comparées, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{|x|e^x}{\sqrt{2\pi}}\frac{(e|a|)^n}{n^{3/2}}$ diverge grossièrement, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1}|P_n(x)a^n|$ diverge, donc $\sum P_n(x)a^n$ ne converge pas absolument.
• On a donc bien établi que $\sum_{n\geq 0}P_n(x)a^n$ converge absolument si et seulement si $|a| \leq \frac{1}{e}$.

2. (a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto P_n(x)a^n$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme).
• Pour tout $b > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [-b,b]$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{n!}|x|.|x+n|^{n-1}|a|^n \leq \frac{1}{n!}b(b+n)^n|a|^{n-1} = P_n(b)|a|^n,$$

donc $\|f_n\|_\infty^{[-b,b]} \leq P_n(b)|a|^n$.
Or, $\sum_{n\geq 1}P_n(b)|a|^n$ converge d'après la question IV1b car $|a| \leq 1/e$, donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1}\|f_n\|_\infty^{[-b,b]}$ converge, donc $\sum_{n\geq 0}f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-b,b]$.
• Par suite, $F_a = \sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ est continue sur $[-b,b]$, ceci étant valable pour tout $b > 0$, $F_a$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$ deux séries absolument convergentes.

Alors la série de terme général $\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right).$$

(c) • $F_a$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'après IV2a.

- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$, comme les séries définissant $F_a(x)$ et $F_a(y)$ convergent absolument (d'après IV1b), on a :

$$\begin{aligned}
F_a(x)F_a(y) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)a^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(y)a^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} P_k(x)a^k P_{n-k}(y)a^{n-k} \quad \text{(par produit de Cauchy de deux séries absolument convergente)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(a^n \sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x+y)a^n \quad \text{(d'après III3)} \\
&= F_a(x+y).
\end{aligned}$$

- $F_a$ est donc bien solution de $(R)$ et, par suite, d'après la question II3f, comme $F_a(0) = P_0(0)a^0 = 1 \neq 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = (F_a(1))^x.$$

(d) En reprenant les notations de la question IV2a,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
- $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (d'après la question IV1b).
- Pour tout $b > 0$, pour tout $n \geq 2$, pour tout $x \in [-b, b]$,

$$\begin{aligned}
|f_n'(x)| = |P_n'(x)a^n| = |P_{n-1}(x+1)a^n| &= \frac{1}{(n-1)!}|x+1||x+1+n-1|^{n-2}|a|^n \\
&\leq \frac{1}{(n-1)!}(b+1)(b+1+n-1)^{n-2}|a|^n = |a|P_{n-1}(b)|a|^{n-1},
\end{aligned}$$

donc $\|f_n'\|_\infty^{[-b,b]} \leq |a|P_{n-1}(b)|a|^{n-1}$.
Or $\sum_{n\geq 2} P_{n-1}(b)|a|^{n-1}$ converge (d'après la question IV1b avec $|a| \leq 1/e$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 2} \|f_n'\|_\infty^{[-b,b]}$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-b, b]$.
- $F_a = \sum_{n\geq 0} f_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-b, b]$, ceci pour tout $b > 0$, donc $F_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n'(x)a^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_{n-1}(x+1)a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x+1)a^{n+1} = aF_a(x+1).$$

(e)
- D'après la question précédente, on a $F_a'(0) = aF_a(1)$.
- En dérivant cette fois-ci $F_a$ à partir de l'expression obtenue à la question IV2c, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a'(x) = \big(\exp(x\ln(F_a(1)))\big)' = \ln(F_a(1))\exp(x\ln(F_a(1))) = \ln(F_a(1))F_a(x),$$

donc, en appliquant en 0, on a aussi $F_a'(0) = \ln(F_a(1))F_a(0) = \ln(F_a(1))$.
- On a donc $\ln(F_a(1)) = F_a'(0) = aF_a(1)$, i.e. $F_a(1)$ est solution de $(E_a)$.

3. (a)
- $G : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n$ est une série entière.
d'après l'étude faite en IV1b, elle converge si et seulement si $a \in [-1/e, 1/e]$, donc son rayon de convergence est $1/e$.
Par suite, $F_a$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right[$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(1) \geq 0$.
Soit $a, b \in [0, 1/e]$ avec $a \leq b$. Pour tout $n \geq 0$, $a^n \leq b^n$, donc $P_n(1)a^n \leq P_n(1)b^n$.
En sommant ces inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$ (les deux séries convergent), on obtient :

$$G(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)a^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)b^n = G(b).$$

La fonction $G$ est donc bien monotone (en même croissante) sur $[0, 1/e]$.

(b) $G(0) = F_0(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(1)0^n = P_0(1) = 1$.
$G(1/e) = F_{1/e}(1)$ est solution de $(E_{1/e})$. Or, $(E_{1/e})$ a une unique solution : $e$, donc $G(1/e) = e$.
Comme $G$ est continue et croissante sur $[0, 1/e]$,

$$G\left(\left[0, \tfrac{1}{e}\right]\right) = [G(0), G(1/e)] = [1, e].$$

(c) • Si $a \in [-1/e, 0]$, $(E_a)$ a une unique solution, $\alpha_a$, donc, comme $G(a) = F_a(1)$ est solution de $(E_a)$, on a $G(a) = \alpha_a$.
• Si $a \in [0, 1/e]$, $(E_a)$ a deux solutions : $\alpha \leq e$ et $\beta_a > e$.
Comme $G(a) = F_a(1)$ est solution de $(E_a)$ et $G(a) \in [1, e]$, $G(a) = \alpha_a$.
• On a donc bien :

$$\forall a \in \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right], \quad F_a(1) = \alpha_a.$$

4. • Pour tout $y > 0$,

$$y^y = C \Leftrightarrow \exp(y\ln(y)) = C \Leftrightarrow y \ln y = \ln C \Leftrightarrow \ln(y) = \frac{\ln C}{y} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(C)\frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \text{ solution de } E_{-\ln(C)}.$$

• Or, $1 \leq C \leq e^{\frac{1}{e}} \Rightarrow 0 \leq \ln(C) \leq 1/e \Rightarrow -\ln(C) \in [-1/e, 0]$, et, dans ce cas, $(E_{-\ln C})$ a une unique solution : $\alpha_{-\ln C} = F_{-\ln(C)}(1)$.
• L'équation $y^y = C$ a donc un unique solution, $y_0$ et $\dfrac{1}{y_0} = F_{-\ln C}(1) \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} y_0 &= (F_{-\ln(C)}(1))^{-1} = F_{-\ln C}(-1) \quad \text{(d'après la question IV2c)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(-1)(-\ln C)^n \\ &= P_0(-1) + P_1(-1)(-\ln C) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-1)(-1+n)^{n-1}(-\ln C)^n \\ &= 1 + \ln C + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{(n-1)^{n-1}}{n!}(\ln C)^n. \end{aligned}$$