

Partie I.

- 1) a) Pour $t = 0$: $f(0) = 1$. Pour $t \neq 0$: $f(t) = \left[\frac{e^{-ts}}{-t} \right]_{s=0}^{s=1} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$.
- b) f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. Le développement limité en 0 de $e^{-t} = 1 - t + o(t)$ entraîne que $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 1 = f(0)$. f est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque, pour $s \in]0, 1]$, on a $t < u \Rightarrow e^{-su} < e^{-st} \Rightarrow f(u) < f(t)$. Enfin, $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^{-t}}{-t} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.
 f est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.
- c) $e^{-t} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!}$ avec un rayon de convergence infini donc $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{n!}$ pour $t \neq 0$, égalité qui s'étend à $t = 0$ puisque $f(0) = 1$. Le rayon de convergence est infini.
- 2) a) Puisque le rayon de convergence est infini on peut intégrer terme à terme ce développement en série entière sur $[0, x]$ pour tout x réel et obtenir: $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n(n!)}$
- b) Pour $x = 1$ on obtient $S(1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n!)} = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt$.
- 3) a) $R(x)$ est défini pour tout $x > 0$ puisque $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, +\infty[$ et que, au voisinage de $+\infty$, $\frac{e^{-t}}{t} = o(e^{-t})$ qui est intégrable sur $[x, +\infty[$.
- b) En intégrant par parties: $-\int_0^1 \ln(t) e^{-t} dt = [\ln(t)(e^{-t} - 1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = S(1)$. Cette intégration par parties est légitime puisque l'intégrale $S(1)$ existe, que $\ln(1) = 0$ et qu'en 0 on a $\ln(t)(e^{-t} - 1) \sim -t \ln(t)$ qui a pour limite 0.
 En intégrant par parties: $-\int_1^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt = [\ln(t) e^{-t}]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -R(1)$. Cette intégration par parties est légitime puisque l'intégrale $R(1)$ existe, que $\ln(1) = 0$ et que $\ln(t) e^{-t}$ a pour limite 0 en $+\infty$.
 On a bien obtenu $\gamma = S(1) - R(1) = -\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.
- c) Par la relation de Chasles: $R(x) = R(1) - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $R'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.
 De $S(x) = \int_0^x f(t) dt$ on déduit $S'(x) = f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ pour $x \neq 0$.
 On en déduit $S'(x) = R'(x) + \frac{1}{x}$ pour $x > 0$. Les fonctions S et $x \mapsto R(x) + \ln(x) + \gamma$ ont des dérivées égales sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Comme elles prennent la même valeur pour $x = 1$ ($S(1) = R(1) + \gamma$) elles sont égales sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- 4) a) La série entière de terme général $\frac{x^k}{k}$ a un rayon de convergence égal à 1 (le terme général tend vers 0 pour $0 < x < 1$ et tend vers l'infini pour $x > 1$) donc la série converge pour $x \in]0, 1[$.
 La fonction $t \mapsto \frac{x^t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $0 \leq \frac{x^t}{t} \leq e^{t \ln(x)}$ qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisque $\ln(x) < 0$. $g(x)$ est donc bien défini pour $x \in]0, 1[$.
 $g_n(x) - g(x) = \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.
 Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ et $t \mapsto x^t = e^{t \ln(x)}$ sont décroissantes et positives sur $]1, +\infty[$ ($\ln(x) < 0$) donc $t \mapsto \frac{x^t}{t}$ l'est aussi. On peut donc écrire $\frac{x^{k+1}}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{x^t}{t} dt \leq \frac{x^k}{k}$ d'où en ajoutant, $\int_{n+1}^{N+1} \frac{x^t}{t} dt \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{x^k}{k} \leq \int_n^N \frac{x^t}{t} dt$ puis en faisant tendre N vers l'infini: $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leq \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt$.

On en déduit $0 \leq g_n(x) - g(x) = \int_n^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \leq \int_n^{n+1} \frac{x^t}{t} dt \leq \frac{x^n}{n}$.

b) On en déduit pour tout $x \in]0, 1[$: $0 \leq g_n(x) - g(x) \leq \frac{1}{n}$ donc $N_\infty(g_n - g) \leq \frac{1}{n}$ qui a pour limite 0 donc la suite g_n converge uniformément vers g sur $]0, 1[$.

c) En utilisant le développement en série entière $\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ valable pour $|x| < 1$ on

obtient $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ pour $x \in]0, 1[$.

D'autre part $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{t \ln(x)}}{t} dt = \int_{-\ln(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = R(-\ln(x))$ car $t \mapsto u = -t \ln(x)$ est une bijection de classe C^1 de $[1, +\infty[$ sur $[-\ln(x), +\infty[$ quand $x \in]0, 1[$.

On en déduit pour $x \in]0, 1[$: $g(x) = -\ln(1-x) - R(-\ln(x)) = -\ln(1-x) - S(-\ln(x)) + \ln(-\ln(x)) + \gamma$ en utilisant le I.3) c).

Par suite $g(x) = \ln\left(\frac{-\ln(x)}{1-x}\right) - S(-\ln(x)) + \gamma$.

De $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ et de la continuité de S en 0 on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \ln(1) - S(0) + \gamma = \gamma$. En

admettant $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \gamma$ on obtient avec $g_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma$.

5) $R(ax) = \int_{ax}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-au}}{u} du$ puisque $u \mapsto au$ est une bijection de classe C^1 de $[x, +\infty[$ sur $[ax, +\infty[$ (pour $x > 0$ et $a > 0$). De même $R(bx) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-au}}{u} du$. On obtient donc $R(ax) - R(bx) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-au} - e^{-bu}}{u} du$. D'autre part en utilisant le I.3) c):

$$R(ax) - R(bx) = S(ax) - S(bx) - \ln(ax) + \ln(bx) = S(ax) - S(bx) + \ln(b) - \ln(a).$$

Par continuité de S en 0 on déduit en faisant tendre x vers 0: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-au} - e^{-bu}}{u} du = \ln(b) - \ln(a)$.

6) a) Pour $x > 0$ on a: $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x} [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$.

Par suite $0 \leq xR(x) \leq e^{-x}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} xR(x) = 0$.

b) Avec le I.3) c): $R(x) = -\ln(x) + S(x) - \gamma$ qui donne $R(x) \sim -\ln(x)$ quand x tend vers 0. On en déduit $\lim_{x \rightarrow 0} xR(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -x \ln(x) = 0$.

On peut donc intégrer par parties: $\int_0^{+\infty} R(x) dx = [xR(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xR'(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$

puisque $xR'(x) = -e^{-x}$ (montré au I.3)c)). On obtient ensuite $\int_0^{+\infty} R(x) dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.

Partie II

1) a) I_n existe puisque $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue et $t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

b) On intègre par parties: $I_{n+1} = [-t^{n+1} e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)t^n e^{-t} dt = (n+1)I_n$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+1} e^{-t} = 0$.

On montre par récurrence sur n que $I_n = n!$. C'est vérifié pour $n = 0$ puisque $I_0 = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.

Supposons $I_n = n!$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$; on en déduit $I_{n+1} = (n+1)I_n = (n+1)!$.

La proposition est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Puisque $P(x+t)$ est une combinaison linéaire des t^k on déduit que $T(P)(x)$ est bien défini comme combinaison linéaire des I_k .

T est une application linéaire puisque $T(\lambda P + Q)(x) = \lambda T(P)(x) + T(Q)(x)$ par linéarité de l'intégrale.

On calcule $T(1)(x) = I_0 = 1$, $T(X)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)dt = xI_0 + I_1 = 1 + x$ donc $T(X) = 1 + X$.

$T(X^2)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(x+t)^2 dt = x^2 I_0 + 2xI_1 + I_2 = 2 + 2x + x^2$ donc $T(X^2) = 2 + 2X + X^2$.

T est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

Sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- b) M est triangulaire et a donc comme unique valeur propre 1 (d'ordre 3). Si elle était diagonalisable elle serait semblable à la matrice diagonale ayant des 1 sur la diagonale, c'est-à-dire la matrice identité et on aurait alors $M = I_3$ ce qui est faux: M n'est donc pas diagonalisable.

- 3) a) Appliquons la formule de Taylor pour les polynômes. Pour un polynôme de degré au plus n on a:

$$P(x+t) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} t^k \text{ donc } P(x+t) = \sum_{k=0}^n t^k b_k(x) \text{ en posant } b_k(x) = \frac{P^{(k)}(x)}{k!}.$$

- b) T est une application linéaire puisque $T(\lambda P + Q)(x) = \lambda T(P)(x) + T(Q)(x)$ par linéarité de l'intégrale. $P(x+t)$ étant combinaison linéaire des t^k ($0 \leq k \leq n$) on obtient que $T(P)(x)$ est combinaison linéaire des I_k ($0 \leq k \leq n$):

$$T(P)(x) = \sum_{k=0}^n I_k b_k(x) = \sum_{k=0}^n I_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) \text{ puisque } I_k = k!.$$

On obtient donc $T(P) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}$ qui appartient bien à $\mathbb{R}_n[X]$. On a $a_k = 1$ pour $k \in [0, n]$.

- c) Le calcul de $T(X^k) = X^k + kX^{k-1} + \dots + k!$ donne la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \dots & n! \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n!/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

M est triangulaire et a donc comme unique valeur propre 1 (d'ordre $n+1$). Le sous-espace propre associé à 1 est l'ensemble des polynômes P qui vérifient $T(P) = P$, c'est-à-dire $P' + P'' + \dots + P^{(n)} = 0$. C'est équivalent à $P' = 0$ puisque si P' n'était pas nul, $P' + P'' + \dots + P^{(n)}$ aurait le degré de P' .

Le sous-espace propre associé à 1 est donc l'ensemble des polynômes constants.

- 4) En la multipliant par e^{-x} l'équation différentielle devient $\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = -e^{-x}g(x)$ d'où $e^{-x}y(x) - y(0) = -\int_0^x e^{-t}g(t)dt$.

Puisque g est continue et bornée (par M), on a $|g(x)e^{-x}| \leq Me^{-x}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc écrire $e^{-x}y(x) - y(0) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}g(t)dt + \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)dt$ d'où $y(x) = ke^x + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}g(t)dt$ en posant $k = y(0) - \int_0^{+\infty} e^{-t}g(t)dt$.

- 5) a) T_g est bien définie puisque g est continue et bornée donc $|g(x+t)e^{-t}| \leq Me^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Le changement de variable défini par $t \mapsto u = t+x$ est une bijection de classe C^1 de $[0, +\infty[$ sur $[x, +\infty[$ donc on peut écrire $T_g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}g(x+t)dt = \int_x^{+\infty} e^{-u+x}g(u)du = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u}g(u)du$.

Puisque $\int_x^{+\infty} e^{-u}g(u)du = \int_0^{+\infty} e^{-u}g(u)du - \int_0^x e^{-u}g(u)du$ on obtient par dérivation:

$$T'_g(x) = T_g(x) + e^x(-e^{-x}g(x)) \text{ d'où } (T_g)' = T_g - g.$$

- b) D'après ce qui précède, $T_g = \lambda g$ entraîne $\lambda g' = (\lambda - 1)g$. Si $\lambda = 0$ on obtient $g = 0$ qui est exclu par l'énoncé. Si $\lambda \neq 0$, on obtient $g(x) = ke^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$. Comme g doit être bornée sur $\mathbb{R}$, la seule possibilité est $\lambda = 1$ et $g = k$ constante. Réciproquement si $g = k$ constante on obtient bien $T_g(x) = k$ donc $T_g = g$.

Si g est constante non nulle, seul $\lambda = 1$ convient. Sinon il n'existe pas de λ tel que $T_g = \lambda g$.

- c) Puisque g est bornée on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|g(x)| \leq N_\infty(g)$. On en déduit:

$$|T_g(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-t}N_\infty(g)dt = N_\infty(g). \text{ On a donc } N_\infty(T_g) \leq N_\infty(g).$$

d) Si g tend vers 0 en $+\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $|g(x)| \leq \varepsilon$ pour $x \geq A$. On en déduit pour $x \geq A$: $|T_g(x)| \leq \int_0^{+\infty} \varepsilon e^{-t} dt = \varepsilon$ puisque $|g(x+t)| \leq \varepsilon$ pour $t \geq 0$. On a bien montré que T_g tend vers 0 en $+\infty$.

- 6) a) L'application $t \mapsto e^{(i-1)t}$ est continue et intégrable sur $[A, +\infty[$ puisque $|e^{(i-1)t}| = e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $[A, +\infty[$ pour tout $A \in \mathbb{R}$.

$$\int_A^{+\infty} e^{(i-1)t} dt = \left[\frac{e^{(i-1)t}}{i-1} \right]_A^{+\infty} = \frac{e^{(i-1)A}}{1-i} \text{ puisque } |e^{(i-1)t}| = e^{-t} \text{ tend vers 0 en } +\infty.$$

- b) L'application $g \mapsto T_g$ est clairement linéaire.

Pour $g(t) = e^{it}$ on calcule $T_g(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-u} e^{iu} du = \frac{e^{ix}}{1-i}$ avec le calcul du II.6a).

$$\text{On a donc } T_g(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + i \sin(x))(1+i) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{i}{2}(\cos(x) + \sin(x)).$$

Par linéarité de T on en déduit:

$$T_c(x) = \operatorname{Re}(T_g(x)) = \frac{1}{2}(\cos(x) - \sin(x)) \text{ et } T_s(x) = \operatorname{Im}(T_g(x)) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)).$$

On a donc $T_c = \frac{1}{2}(c - s)$ et $T_s = \frac{1}{2}(c + s)$. L'application $t \mapsto T_g$ est bien un endomorphisme de F et sa matrice dans la base (c, s) est $N = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

N n'est pas diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ puisque son polynôme caractéristique égal à $\chi_N(x) = \left(\frac{1}{2} - x\right) \left(\frac{1}{2} - x\right) + \frac{1}{4} = x^2 - x + \frac{1}{4}$ n'a pas de racine réelle ($\Delta = 1 - 2 = -1 < 0$).

Partie III

- 1) a) Pour $x \in]-r, r[$ on peut dériver terme à terme et obtenir:

$$\theta'(x) = \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} \text{ et } \theta''(x) = \sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

En reportant dans l'équation différentielle on obtient:

$$\sum_{n \geq 0} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = 1 \text{ ou encore } \sum_{n \geq 0} n^2 a_n x^{n-1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^n - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = 1.$$

Posons $n = n' + 2$ dans la première somme et $n = n' + 1$ dans la deuxième:

$$\sum_{n' \geq -2} (n' + 2)^2 a_{n'+2} x^{n'+1} - \sum_{n' \geq -1} a_{n'+1} x^{n'+1} - \sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1} = 1 \text{ d'où en regroupant:}$$

$$a_1 - a_0 + \sum_{n \geq 0} ((n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n) x^{n+1} = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière on en déduit: $a_1 - a_0 = 1$ et pour $n \geq 0$: $(n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$.

- b) Soit $K = \max(|a_0|, |a_1|)$. Montrons par récurrence double sur n que pour tout n on a $n!|a_n| \leq K$. C'est vérifié pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la propriété vraie pour n et $n + 1$. On en déduit: $(n+2)!|a_{n+2}| = \frac{(n+1)!}{n+2} |a_{n+2}| \leq \frac{(n+1)!}{n+2} (|a_{n+1}| + |a_n|) \leq \frac{1}{n+2} (K + (n+1)K) = K$ en utilisant l'hypothèse de récurrence pour n et $n + 1$. On a donc bien montré que pour tout $n \geq 0$: $|a_n| \leq \frac{K}{n!}$.

Soit une série entière associée à une suite (a_n) vérifiant $a_1 - a_0 = 1$ et pour $n \geq 0$: $(n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Puisque pour tout $n \geq 0$ elle vérifie $|a_n| \leq \frac{K}{n!}$ on en déduit que le rayon de convergence est infini, donc la somme de la série vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

- 2) a) De $z(x) = e^{-x} y(x)$ on déduit $z'(x) = -e^{-x} y(x) + e^{-x} y'(x)$ et $z''(x) = e^{-x} y(x) - 2e^{-x} y'(x) + e^{-x} y''(x)$. On en déduit $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x}(xy(x) - 2xy'(x) + xy''(x)) + (2x+1)(-y(x) + y'(x)) = e^{-x}(xy''(x) + y'(x) - (x+1)y(x))$.

Par suite y est dans S si et seulement si $xz''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-x}$.

b) Pour $x > 0$ l'équation s'écrit $Z'(x) + \frac{2x+1}{x}Z(x) = 0$. Une primitive de $\frac{2x+1}{x}$ est $2x + \ln(x)$. En multipliant l'équation par $e^{2x+\ln(x)} = xe^{2x}$ elle se réécrit: $(xe^{2x}Z(x))' = xe^{2x}Z'(x) + (2x+1)e^{2x}Z(x) = 0$ d'où les solutions $Z(x) = \frac{\lambda}{x}e^{-2x}$.

c) Le même calcul qu'au b) donne ici $(xe^{2x}Z(x))' = e^x$ qui s'intègre en $(xe^{2x}Z(x)) = e^x + \lambda$ d'où $Z(x) = \frac{1}{x}(e^{-x} + \lambda e^{-2x})$.

On peut aussi utiliser le III.2)b) et appliquer la méthode de variation de la constante.

d) Il suffit d'intégrer Z pour obtenir $z(x) = \int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \lambda \int_1^x \frac{e^{-2t}}{t} dt + C$. En introduisant $R(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\int_1^x \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ et de même $R(2x) = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2u}}{u} du = -\int_1^x \frac{e^{-2t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$ on obtient $z(x) = -R(x) - \lambda R(2x) + \mu$ où λ et μ sont des réels quelconques.

e) La solution générale $y \in S$ s'en déduit: $y(x) = e^x z(x) = -e^x R(x) - \lambda e^x R(2x) + \mu e^x$ où λ et μ sont des réels quelconques.

3) a) En reportant $R(x) = -\ln(x) - \gamma + o(1)$ et de même pour $R(2x)$ dans le III.2)e) on obtient:

$$y(x) = e^x(\ln(x) + \gamma + \lambda(\ln(2x) + \gamma) + \mu + o(1)) = e^x(\ln(x)(1 + \lambda) + \gamma + \lambda(\ln(2) + \gamma) + \mu + o(1)).$$

Cette expression n'a une limite finie en 0 que pour $\lambda = -1$ puisque $\ln(x)$ tend vers $-\infty$.

On a alors avec $R(x) = S(x) - \ln(x) - \gamma$:

$$y(x) = e^x(R(2x) - R(x) + \mu) = e^x(S(2x) - S(x) + \mu') \text{ pour } x > 0 \text{ en posant } \mu' = -\ln(2) + \mu.$$

b) En posant comme au III.2)a) $z(x) = e^{-x}y(x) = S(2x) - S(x) + \mu'$ on calcule pour $x \neq 0$:

$$z'(x) = 2S'(2x) - S'(x) = 2\frac{1-e^{-2x}}{2x} - \frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$$

$$z''(x) = -\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x^2} + \frac{-e^{-x} + 2e^{-2x}}{x}$$

$$\text{D'où } xz''(x) + (2x+1)z'(x) = -\frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} + -e^{-x} + 2e^{-2x} + 2(e^{-x} - e^{-2x}) + \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} = e^{-x}.$$

C'est vrai aussi pour $x = 0$ donc z vérifie l'équation (*) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par suite $y(x) = e^x(S(2x) - S(x) + \mu')$ vérifie l'équation $xy'' + y' - (x+1)y = 1$. Comme S est développable en série entière on en déduit par application du produit de Cauchy que y est développable en série entière avec un rayon de convergence infini. Au III.1) on a trouvé que l'équation $xy'' + y' - (x+1)y = 1$ possède une unique solution possédant un développement en série entière si on impose la condition initiale $y(0) = a_0$. On peut donc écrire $\theta(x) = e^x(S(2x) - S(x) + a_0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'application du produit de Cauchy permet d'en déduire une expression de a_n .

Complément: calculons une expression de a_n . On peut se limiter au cas où $a_0 = 0$.

De $\theta(x) = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$, $S(2x) - S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}(2^n - 1)x^n}{n(n!)}$ et $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ on déduit:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(2^k - 1)}{k(k!)} \frac{1}{(n-k)!} \text{ d'où } n!a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(2^k - 1)}{k}.$$

On peut simplifier en écrivant: $n!a_n = \sum_{k=1}^n \int_1^2 (-t)^{k-1} \binom{n}{k} dt = \int_1^2 \frac{(1-t)^n - 1}{(1-t) - 1} dt = \sum_{k=1}^n \int_1^2 (1-t)^{k-1} dt$

$$= \sum_{k=1}^n \left[-\frac{(1-t)^k}{k} \right]_1^2 = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

$$\text{On obtient finalement } a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

On peut aussi retrouver cette expression en utilisant la relation $(n+2)^2 a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$ et $a_1 = 1$.

On pose $b_n = n!a_n$ qui donne $(n+2)b_{n+2} - b_{n+1} - (n+1)b_n = 0$ ou encore $(n+2)(b_{n+2} - b_{n+1}) = -(n+1)(b_{n+1} - b_n)$ qui avec $b_1 = 1$ et $b_0 = 0$ donne $n(b_n - b_{n-1}) = (-1)^{n-1}$ d'où $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.