PROBLÈME

Partie I.

1. $\forall x \in]-1,1[$, $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}}$.

2. On prend $x = -1/2$ dans la relation précédente, on obtient $-\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^k}{k} \iff \boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k k}}$.

3. (a) Posons $u_k = \frac{1}{k(k+1)} \neq 0$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+2} \underset{k\to+\infty}{\sim} 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\boxed{\sum_{k\geq 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \text{ a pour rayon de convergence } 1}$.

   De plus, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \geq 1$.

   Donc, pour tout $k \geq 1$, $\frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = x.\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

   Or, d'après la question 1. en remplaçant x par $-x$, on obtient $-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = \ln(1-x)$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{\ell=2}^{+\infty} \frac{x^\ell}{\ell} = -\ln(1-x) - x$.

   En conclusion,
   $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}} = x\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x = \boxed{(1-x)\ln(1-x) + x}$ $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[}$.

   (b) En prenant $x = 1/2$ dans la relation précédente, on obtient $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^{k+1}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$,

   ainsi, $\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln(2)}$.

4. (a) $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est une série alternée avec $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, donc, $\boxed{\text{d'après le théorème spécial des séries alternées, } \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ converge}}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est une série alternée avec $\left(\frac{x^k}{k}\right)_{k\geq 1}$ suite décroissante qui tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

   Donc, d'après le théorème spécial des séries alternées, $\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}}$

   car, $|x| = x \leq 1$.

(c) Posons $u_k(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$, $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$.

* Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $|S(x) - S_n(x)| = \left| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leq \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, donc, $\displaystyle\sum_{k\geq 1} u_k$ converge uniformément vers S sur $[0,1]$.

* De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u_k continue sur $[0,1]$.

Ainsi, S est donc continue sur $[0,1]$, donc, $\boxed{\ln(2) = \displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}}$

Partie II.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{a_n = \frac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{n 2^{n+1} n!}} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)}{n.2^{n+1} n! 2 \times 4 \times \ldots \times (2n)} = \frac{(2n)!}{n.2^{n+1} n!.2^n n!} = \boxed{\frac{(2n)!}{n.2^{2n+1}.(n!)^2}}.$$

(b) Formule de Stirling : $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}}$.

(c)
$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4n\pi}}{n.2^{2n+1}\left(\left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n} n^{2n} 2\sqrt{n\pi}}{n.2^{2n+1} n^{2n} 2\pi n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}.n^{3/2}}.$$

Or, $\displaystyle\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$.

D'après le critère de l'équivalent des séries à termes positifs, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge}}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)(1 - \sin^(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}(x)\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$. On fait une intégration par parties $u'(x) = \sin^{2n}(x)\cos(x)$, $v(x) = \cos(x)$, $u(x) = \dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(x)$ et $v'(x) = -\sin(x)$. u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

Ainsi, $\boxed{I_n - I_{n+1}} = \left[\dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+1}(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2n+1}\sin^{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\dfrac{I_{n+1}}{2n+1}}$.

(b) D'après la question précédente, $I_{n+1} = \dfrac{(2n+1)I_n}{2n+2}$.

D'où, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{(2n-1)\ldots(5).(3).(1)}{(2n).(2n-2)\ldots(4).(2)} I_0$.

Or, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n.n!}\dfrac{\pi}{2} = n\pi a_n}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f_n(x) = \dfrac{\sin^{2n}(x)}{n}$.

On sait que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{y^n}{n}$ est une série entière de rayon de convergence 1 et, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} = -\ln(1-y)$.

On a pour tout $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $|\sin^2(x_0)| < 1$, donc,

$\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = -\ln(1 - \sin^2(x_0)) = -\ln(\cos^2(x_0)) = -2\ln(\cos(x_0))$.

Ainsi, $\boxed{\text{la série de fonction } \sum_{n\geq 1} f_n \text{ converge simplement vers la fonction } f : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\ln(\cos(x)) \end{array}}$

(b) Appliquons le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions :

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

– $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur vers $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers f qui est continue par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

– $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin^{2n}(x)}{n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}(x)}{n} \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n} = \sum_{n\geq 1} \pi a_n$ d'après la question II.2.b),

or, $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge d'après II.1.(c). Ainsi, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{\sin^{2n}(x)}{n}\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{I_n}{n} = \sum_{n\geq 1} \pi a_n$ converge.

D'après le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, $\boxed{f \text{ est intégrable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[}$ et,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x = \boxed{\frac{-2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x}.$$

4. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$.

(a) Nous avons montré dans la question précédente que I converge.
On part de I et on pose $x = \frac{\pi}{2} - h$ avec $h \mapsto \frac{\pi}{2} - h$ de classe $\mathcal{C}^1$ est bijective de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}h$.

Ainsi, $\boxed{J \text{ converge et, } I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\right)(-\mathrm{d}h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = J.}$

(b)
$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)\cos(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(2) + (\sin(2x))\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On pose $u = 2x \iff x = \frac{x}{2}$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0, \pi[$ et $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$.

Ainsi, $I+J = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(u))\,\mathrm{d}u$.

On pose $u = \frac{\pi}{2} + v$ dans la dernière intégrale avec $v \mapsto \frac{\pi}{2} + v$ de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, $I+J = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}J + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + v\right)\right)\mathrm{d}v = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}J + \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(v))\,\mathrm{d}v$
$\iff$
$I + J = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}(J + I) \iff \dfrac{1}{2}(I + J) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

En conclusion, $\boxed{I = J = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)}$ car $I = J$.

5. D'après les questions 3.(b) et 4.(b), $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}.I = \frac{\pi^2}{4}\ln(2)}.$

Partie III.

1. (a) $\displaystyle\sum_{i\geq 1}\frac{1}{2^i}$ converge, et, $\boxed{U_n =}\displaystyle\sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2^{n+1}}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{1}{2^n}}$.

   Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{\displaystyle\frac{1}{2^k}=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{1}{2^i}-\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=U_{k-1}-U_k}$.

   (b) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k.2^k}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k}(U_{k-1}-U_k)$.

   D'après I.2., $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k.2^k}=\sum_{k\geq 1}\frac{U_k}{k}$ converge.

   Ainsi, $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_{k-1}}{k}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k}$, on pose $j=k-1$ dans la première somme, on obtient $R_n=\displaystyle\sum_{j=n}^{+\infty}\frac{U_j}{j+1}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k}=\frac{U_n}{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}U_k.\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)$ en posant $k=j$ dans la première somme.

   Ce nous donne $\boxed{\displaystyle R_n=\frac{U_n}{n+1}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}}$

   (c) Lorsque k tend vers $+\infty$, $\displaystyle\frac{U_k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)2^k}=\circ\left(\frac{1}{k.2^k}\right)\iff\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geq n_0,\ 0\leq\frac{U_k}{k(k+1)}\leq\varepsilon\displaystyle\frac{1}{k.2^k}$.

   Ainsi, étant donné que les séries convergent d'après la partie I., en sommant les inégalités, pour $k\geq n$ avec $n\geq n_0$, $0\leq\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}\leq\varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k.2^k}=R_n$.

   Ceci nous permet d'en conclure que :

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}=\circ(R_n)}.$$

   (d) D'après les deux questions précédente,
   $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{U_k}{k(k+1)}=\frac{U_n}{n+1}-R_n=\circ(R_n)\iff\frac{U_n}{n+1}=R_n+\circ(R_n)\underset{n\to+\infty}{\sim}R_n$.

   Ainsi, $\boxed{\displaystyle R_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{U_n}{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n.2^n}}$.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soit $t\in[0,1]$, donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $-t\neq 1$, et,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k=\frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}=\frac{1}{1+t}-(-1)^n\frac{t^n}{1+t}}$$

   (b) On intègre des fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ et on obtient par linéarité de l'intégrale :
   $\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^1=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Soit, en posant $j=k+1$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}=\underbrace{\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}}_{=\ln(2)}-\underbrace{\sum_{j=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}}_{=S_n}=\ln(2)-(-1)^n\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$

$\iff \boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=(-1)^n\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t}$.

(c) On fait une intégration par parties en posant $u(t)=\frac{1}{1+t}$, $v'(t)=t^n$, $u'(t)=-\frac{1}{(1+t)^2}$ et $v(t)=\frac{t^{n+1}}{n+1}$ avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Or, $u(0)v(0)=0$ et $u(1)v(1)=-\frac{1}{2(n+1)}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t}$.

(d) Nous avons $\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{2n}$, et, $0\leq\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\leq\int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+2}\underset{n\to+\infty}{\to}0$.

D'où, $\dfrac{(-1)^n}{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t=\circ\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)=\circ\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$, ainsi, $\boxed{S_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{2n}}$.

3. (a) Nous avons montré en II.1.(c) que $a_k\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}k^{3/2}}$.

$\boxed{\text{Soit } \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall k\geq N}$, $|2a_k\pi k^{3/2}-1|\leq\varepsilon\iff 1-\varepsilon\leq 2a_k\pi k^{3/2}\leq 1+\varepsilon$.

Or, $\pi k^{3/2}>0$, donc,

$$\boxed{(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}\leq a_k\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}}$$

(b) Pour tout entier $k\geq 2$, on a $\forall t\in[k-1,k]$, $\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$, en intégrant sur $[k-1,k]$, on obtient $\dfrac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$.

De même, $\forall t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$, en intégrant sur $[k,k+1]$, on obtient $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$.

En conclusion, $\boxed{\forall k\geq 2,\quad ,\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}}$.

(c) D'après les deux questions précédentes, $\forall k\geq N$, quitte à supposer $\varepsilon<1$,

$(1-\varepsilon)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}\leq(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}\leq a_k\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}}\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}$.

Etant donné que $\sum a_n$ converge et que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}$ converge, alors, pour tout $n\geq N$, en sommant les inégalités pour k compris entre $n+1$ et $+\infty$, on obtient :

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}\leq\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\iff\boxed{(1-\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}\leq T_n\leq(1+\varepsilon)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}}$$

(d) On a $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{\frac{3}{2}}}=\int_n^{+\infty}t^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t=\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_n^{+\infty}=\frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, avec la question précédente, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, tel que $\forall n\geq N$,

$(1-\varepsilon)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{2}{\sqrt{n+1}}\leq T_n\leq(1+\varepsilon)\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{2}{\sqrt{n}}\iff(1-\varepsilon)\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}}\leq T_n\leq(1+\varepsilon)\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

Etant donné que $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, on en conclut que :

$$\boxed{T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}.$$

4. En procédant comme en III.1. et en partant de $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k$, on obtient :
$V_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}-U_k}{k(k+1)} = \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{U_j}{(j+2)(j+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k(k+1)}$ en posant $j = k-1$ dans la première somme, car les séries convergent toutes d'après la partie I.
$$V_n = \frac{U_n}{(n+2)(n+1)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) = \frac{U_n}{(n+2)(n+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2U_k}{k(k+1)(k+2)}.$$
En procédant comme en III.1.c), on montre que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2U_k}{k(k+1)(k+2)} = \circ(V_n)$.
Ainsi, $V_n + \circ(V_n) = \dfrac{U_n}{(n+2)(n+1)}$, d'où, $\boxed{V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{U_n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 2^n}}$.

5. Nous avons trouvé les équivalents suivants des restes des quatre séries convergentes :
$U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n2^n}$, $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2 2^n}$, $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{2n}$ et $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$.
Or, $\dfrac{1}{n^2 2^n} = o\left(\dfrac{1}{n2^n}\right)$, $\dfrac{1}{n2^n} = o\left(\dfrac{(-1)^n}{2n}\right)$ et $\dfrac{(-1)^n}{2n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)$.
Ainsi, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)2^k} \text{ est celle qui converge le plus rapidement}}$ et,
$\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{k\geq 1} a_k \text{ qui converge le moins rapidement}}$.