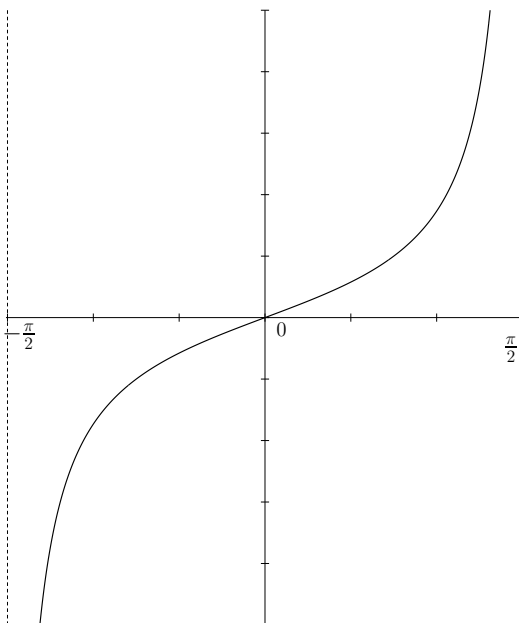


Partie I A.

1. La fonction $\tan$ a pour période π puisque $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$.
2. La fonction $\tan$ est strictement croissante et impaire sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et elle a pour limite $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$. La stricte croissance de $\tan$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ montre que π est la plus petite période positive de $\tan$.



3. Démontrons par récurrence sur n l'existence de la suite (T_n) .

$\tan^{(0)}(x) = \tan x = T_0(\tan x)$ en posant $T_0(X) = X$.

Supposons pour un entier n l'existence d'un polynôme T_n vérifiant $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan x)$.

En dérivant la fonction composée on obtient: $\tan^{(n+1)}(x) = T'_n(\tan x)(1 + \tan^2(x))$.

En posant $T_{n+1} = (1 + X^2)T'_n$ on obtient $\tan^{(n+1)}(x) = T_{n+1}(\tan x)$ où T_{n+1} est un polynôme.

La propriété est bien démontrée par récurrence.

4. $T_1 = 1 + X^2$, $T_2 = (1 + X^2) \times 2X = 2X^3 + 2X$ et $T_3 = (1 + X^2) \times (6X^2 + 2) = 6X^4 + 8X^2 + 2$.

5. On démontre par récurrence sur n que T_n est un polynôme de degré $n + 1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$.

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $T_0 = X$ a pour degré 1.

Supposons le vrai pour un entier n . De $T_{n+1} = (1 + X^2)T'_n$ on déduit que T_{n+1} est un polynôme à coefficients entiers (T'_n l'étant) et qu'il a pour degré $n + 2$ (le degré de T'_n est $n + 1 - 1 = n$). On a bien démontré la propriété par récurrence.

6. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral:

si f est de classe C^{N+1} sur $[a, b]$ alors $f(b) = \sum_{k=0}^N \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t) dt$.

Prenons $f = \tan$, $a = 0$, $b = x$ et $N = 2n + 1$. La fonction $\tan$ étant impaire, ses dérivées d'ordre pair sont aussi des fonction impaires et donc s'annulent en 0. On obtient bien la formule demandée en posant $t_j = \tan^{(2j+1)}(0)$ et en utilisant $f^{(2n+2)}(t) = T_{2n+2}(\tan t)$.

Partie I B.

7. On effectue une intégration par parties sur $[0, x] \subset I$:

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_{n+1}(x).$$

8. (a) Puisque $f^{(n)} \geq 0$ et $b > 0$ (donc $b - t \geq 0$), la suite $(R_n(b))$ est positive. De plus $R_{n+1}(b) = R_n(b) - \frac{b^n}{n!} f^{(n)}(0) \leq R_n(b)$. La suite est décroissante, minorée par 0 donc elle converge.

(b) i. En effectuant le changement de variable défini par $t = xu$ on obtient:

$$R_n(x) = \int_0^1 \frac{(x-xu)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(xu) x du = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(xu) du.$$

ii. On sait déjà que $R_n(x) \geq 0$ puisque $x \geq 0$. Comme $f^{(n+1)} \geq 0$, la fonction $f^{(n)}$ est croissante donc $f^{(n)}(xu) \leq f^{(n)}(ub)$ et puisque $1-u \geq 0$ et $x \geq 0$ on obtient bien la majoration demandée.

iii. Avec i. et ii. on obtient $R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^n \frac{b^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n)}(ub) du = \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b)$.

(c) Appliquons à nouveau la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour la fonction f sur l'intervalle $[0, x]$ (avec $x > 0$).

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + R_{n+1}(x) \text{ et puisque } 0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b) \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers}$$

$$+\infty \text{ (car } 0 < \frac{x}{b} < 1) \text{ on obtient bien } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Puisque f est impaire, les $f^{(2n)}(0)$ sont nuls et l'égalité s'étend donc aux x dans $] -b, 0[$ par imparité des deux membres de l'égalité.

9. La fonction $\tan$ vérifie les conditions demandées pour f : elle est de classe C^∞ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geq 0$ puisque T_n est à coefficients dans $\mathbb{N}$ et $\tan(x) \geq 0$. Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on peut trouver un $b \in]x, \frac{\pi}{2}[$ et le résultat du I B.8.(c) s'applique. Avec $\tan^{(2n)}(0) = 0$ et en posant $t_n = \tan^{(2n+1)}(0)$ on obtient le résultat demandé.

10. D'après la question précédente le rayon de convergence est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$. Mais s'il était supérieur à $\frac{\pi}{2}$, la fonction tangente aurait une limite finie en $\frac{\pi}{2}$, ce qui est faux. Le rayon de convergence est donc égal à $\frac{\pi}{2}$.

Partie II A.

$$1. \psi_n(X^i) = \frac{1}{i+1} ((X+1)^{i+1} - X^{i+1}) = \sum_{j=0}^i \frac{1}{i+1} \binom{i+1}{j} X^j.$$

2. Si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ on déduit par linéarité de l'intégrale que $\psi_n(P) = \sum_{i=0}^n a_i \psi_n(X^i)$. Comme le degré de $\psi_n(X^i)$ est égal à i , $\psi_n(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

3. ψ_n est linéaire par linéarité de l'intégrale et elle va de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. D'après la formule obtenue au II A.1 (en échangeant i et j), la matrice A de ψ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est une matrice carrée d'ordre $n+1$ telle que $a_{i,j} = \frac{1}{j+1} \binom{j+1}{i}$ pour $i \leq j$ et $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (en numérotant les lignes et les colonnes de 0 à n).
5. La matrice A est donc triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale ($a_{i,i} = 1$). Elle est donc inversible ($\det(A) = 1$) et ψ_n est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. Comme la matrice A est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux qui sont tous égaux à 1: ψ_n a une seule valeur propre d'ordre $n+1$ qui est égale à 1.
Si ψ_n était diagonalisable, sa matrice serait semblable à la matrice identité, donc serait égale à l'identité; c'est faux puisque $a_{0,1} = \frac{1}{2}$. Donc ψ_n n'est pas diagonalisable.

7. (a) Si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $Q = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} a_i X^{i+1}$ convient.
- (b) $\psi_n(P)(x) = [Q(t)]_x^{x+1} = Q(x+1) - Q(x)$.
- (c) $\psi_n(P)'(x) = Q'(x+1) - Q'(x) = P(x+1) - P(x) = \psi_n(P')(x)$.

Partie II B.

8. On fait une démonstration par récurrence sur k . $S_0 = 1$ existe et est unique. Supposons l'existence et l'unicité de $S_0, \dots, S_k$. La condition (b) est vérifiée si et seulement si $S_{k+1}(x) = (k+1) \int_0^x S_k(t) dt + C = Q_k(x) + C$. La condition (c) pour S_{k+1} est vérifiée si et seulement si $C = - \int_0^1 Q_k(t) dt$. On a donc montré l'existence et l'unicité de S_{k+1} et la suite (S_m) est bien définie de manière unique par récurrence.
9. $S_1 = X + C$ avec $C = - \int_0^1 t dt = -\frac{1}{2}$ donc $S_1 = X - \frac{1}{2}$.
 $S_2' = 2X - 1$ donc $S_2 = X^2 - X + C$ avec $C = - \int_0^1 (t^2 - t) dt = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ donc $S_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}$.
 $S_3' = 3X^2 - 3X + \frac{1}{2}$ donc $S_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X + C$ avec $C = - \int_0^1 \left(t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right) dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$
donc $S_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$.
10. On le montre par récurrence sur k . C'est vérifié pour $k = 0$. Supposons que S_k soit un polynôme unitaire de degré k . De $S_{k+1}' = (k+1)S_k$ on déduit que le terme dominant de S_{k+1} est X^{k+1} , donc S_{k+1} est bien un polynôme unitaire de degré $k+1$. La propriété est démontrée par récurrence.
11. Pour $k \geq 2$, $S_k(1) - S_k(0) = \int_0^1 S_k'(t) dt = \int_0^1 k S_{k-1}(t) dt = 0$ puisque (c) s'applique à $k-1 \geq 1$.
12. Considérons la suite (T_m) définie par $T_m(x) = (-1)^m S_m(1-x)$. Elle vérifie les conditions du II B.8: $T_0 = 1$, $T_{k+1}'(x) = (-1)^k S_{k+1}'(1-x) = (-1)^k (k+1) S_k(1-x) = (k+1) T_k(x)$ et pour $k \geq 1$, $\int_0^1 T_k(t) dt =$

$$\int_0^1 (-1)^k S_k(1-t) dt = \int_0^1 (-1)^k S_k(u) du = 0 \text{ en faisant le changement de variable } u = 1-t.$$

Par unicité de la suite (S_m) , on en déduit $T_m = S_m$ pour tout m .

- 13.** Montrons par récurrence sur k que S_k convient (l'unicité résulte du fait que ψ_n est bijectif). C'est vrai pour $k = 0$ puisque $\psi_n(1)(X) = 1$. Supposons pour un entier k que $\psi_n(S_k)(X) = X^k$. D'après II A.7(c) et la condition (b) du II B.8: $\psi_n(S_{k+1})'(X) = \psi_n((k+1)S_k)(X) = (k+1)X^k$. On en déduit $\psi_n(S_{k+1})(X) = X^{k+1} + C$ avec $C = \psi_n(S_{k+1})(0) = \int_0^1 S_{k+1}(t) dt = 0$ avec la condition (b) du II B.8. On a bien démontré la propriété pour $k+1$. Elle est démontrée par récurrence.

- 14.** Avec la question II B.9. on obtient: $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$, $\sigma_2 = \frac{1}{6}$ et $\sigma_3 = 0$.

- 15.** Pour $k \geq 3$ impair: $S_k(0) = S_k(1)$ d'après la question 11 et $S_k(0) = -S_k(1)$ en posant $x = 1$ dans la question 12. On a donc $\sigma_k = S_k(0) = 0$.

- 16.** Montrons le par récurrence sur n . C'est vrai pour $n = 0$ puisque $S_0(x) = 1 = \sigma_0$. Supposons pour un entier $n \geq 1$ que $S_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k}$. En intégrant $S'_{n+1} = (n+1)S_n$:

$$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k} \sigma_k x^{n-k+1} + C \text{ avec } C = S_{n+1}(0) = \sigma_{n+1}.$$

$$\text{Avec } \frac{n+1}{n-k+1} \binom{n}{k} = \frac{(n+1)n!}{(n-k+1)k!(n-k)!} = \binom{n+1}{k} \text{ on obtient } S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \sigma_k x^{n+1-k}.$$

La propriété est vraie pour $n+1$, elle est donc démontrée par récurrence.

- 17.** Pour $n \geq 2$, $S_n(1) = S_n(0) = \sigma_n$, donc en posant $x = 1$ dans le résultat de la question 16 on obtient $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \sigma_k = 0$.

- 18.** On utilise la formule précédente sous la forme: $\sigma_{n-1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \sigma_k$. (*)

Écrivons en python une fonction qui calcule σ_N . Pour calculer les coefficients binomiaux on utilisera la relation de récurrence: $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}$.

def calculsigma(N):

sigma=[1]	(au départ la liste contient σ_0)
for n in range(2,N+2):	(on applique (*) pour n de 2 à N+1)
somme=binomial=1.	(somme et coefficient binomial pour k=0)
for k in range(1,n-1):	(pour k de 1 à n-2)
binomial=binomial * (n-k+1.)/k	(on calcule le coefficient binomial pour k)
somme=somme+binomial * sigma[k]	(on ajoute le terme d'indice k à la somme)
sigma.append(-somme/n)	(on augmente la liste du terme d'indice n-1)
return sigma[N]	

Pour $N = 50$ on obtient 7.500866746076968e+24. Remarque: en important la fonction special de scipy, special.bernoulli(50)[50] donne 7.5008667460769792e+24 (erreur relative de 1.4e-15).

Partie III .

1. Appliquons la formule du produit de Cauchy: si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_1 , si $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ a pour rayon de convergence R_2 , alors en posant $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ a un rayon de convergence au moins égal à $\min(R_1, R_2)$.

Prenons $f(z) = S(z)$ avec $R_1 = R$ et $g(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$ avec $R_2 = +\infty$.

On calcule $c_n = \sum_{k=0}^n \frac{\sigma_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sigma_k = \frac{\sigma_n}{n!}$ si $n \geq 2$ (en utilisant la question 17).

Avec $c_0 = \sigma_0$ et $c_1 = \sigma_0 + \sigma_1$ on obtient bien $S(z)e^z = S(z) + z$ pour $|z| < R$.

2. On en déduit pour $|z| < \frac{R}{2}$: $(e^{2iz} - 1)S(2iz) = 2iz$.

Si $z = a + ib$, $e^{2iz} = e^{-2b} e^{2ia}$ donc $e^{2iz} = 1$ si et seulement si $b = 0$ et $a \in \pi\mathbb{Z}$.

On en déduit pour $z \neq 0$ et $|z| < \rho = \min(\frac{R}{2}, \pi)$: $S(2iz) = \frac{2iz}{e^{2iz} - 1}$, d'où $iT(z) = iz + S(2iz)$.

Il y a une erreur dans l'énoncé: il faut poser $T(0) = \frac{1}{i}$.

T admet donc un DSE sur le disque ouvert de rayon ρ : $T(z) = z + \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2i)^n \sigma_n}{n!} z^n$.

En utilisant $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$ et $\sigma_n = 0$ pour n impair ≥ 3 on obtient: $T(z) = \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-4)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} z^{2n}$ pour $|z| < \rho$.

3. Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $x \neq 0$: $2 \frac{e^{4ix} + 1}{e^{4ix} - 1} - \frac{e^{2ix} + 1}{e^{2ix} - 1} = \frac{2(e^{4ix} + 1) - (e^{2ix} + 1)^2}{e^{4ix} - 1} = \frac{e^{4ix} - 2e^{2ix} + 1}{e^{4ix} - 1} = \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = i \tan(x)$.

On en déduit: $i \tan(x) = \frac{1}{x}(T(2x) - T(x))$ donc $\tan(x) = -\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-4)^n \sigma_{2n}}{(2n)!} (4^n - 1) x^{2n}$ puisque le coefficient s'annule pour $n = 0$.

En changeant n en $n + 1$: $\tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{n+1} \sigma_{2n+2}}{(2n+2)!} (4^{n+1} - 1) x^{2n+1}$.

On en déduit: $t_n = \frac{(-1)^n 4^{n+1} (4^{n+1} - 1)}{(2n+2)!} \sigma_{2n+2}$.

On vérifie que $t_0 = 1$ et en calculant $\sigma_4 = -\frac{1}{30}$ avec la formule (*) on obtient $t_1 = \frac{1}{3}$.