Sujet E3A PC 2022

EXERCICE 1

Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots, n, \cdots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \dots, n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$. Ainsi le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k l'événement : «le sauteur a réussi son k-ième saut» et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.
2. Rappeler sans démonstration le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction exponentielle.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
4. Déterminer $\mathbb{P}([X=1])$.
5. Justifier que $[X=2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X=2])$
6. Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'évènement $[X=n]$ en fonction d'évènements du type S_k.
7. Déterminer la loi de X.
8. Vérifier par **le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=n]) = 1$.
9. Montrer que X possède une espérance et la calculer.

EXERCICE 2

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. **Etude de la convergence de la série de terme général u_n**
   - **1.1.** Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
   - **1.2.** Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
   - **1.3.** Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
2. **Calcul de la somme de cette série**
   - **2.1.** Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.
   - **2.2.** En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t$
   - **2.3. Intégration terme à terme ?**
     - **2.3.1.** Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.
     - **2.3.2.** Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geqslant \frac{1}{n+1}$.
     - **2.3.3.** Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

2.4. On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

EXERCICE 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique.
On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \text{ et } \forall j \in [\![2, n]\!], f(e_j) = e_1 + e_j \right) \text{ et } (g = f - id_{E_n}).$$

1. Donner, dans la base $\mathscr{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g.

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

3.1. Déterminer la base $\mathscr{B}_1$ de $\text{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathscr{B}_2$ de $\text{Ker}(g)$.

3.2. Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n.

3.3. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

3.4. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

3.4.1. Méthode 1

(i) Démontrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont stables par g.

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathscr{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\text{Im}(g)$ induit par g.

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h.

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2.

3.4.2. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}\,(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathscr{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n, la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

3.5. Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$ telle que $P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \cdots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1}

3.6. Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

4. Résoudre pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + tU$ où U est la première colonne de la matrice P.

EXERCICE 4

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 e^{-xt}\mathrm{d}t$.

1. **Continuité de f**

   1.1. Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$$

   1.2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}\,t$ est convergente.

   1.3. En déduire que la fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   1.4. En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. **Régularité de f**

   2.1. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

   2.1.1. Montrer que $\forall t \geqslant 0,\ 0 \leqslant |\sin(t)| \leqslant t$.

   2.1.2. Montrer que $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t} e^{-xt} \leqslant te^{-at}$.

   2.1.3. Montrer que $\forall t > 0,\ 0 \leqslant \sin^2(t) e^{-xt} \leqslant e^{-at}$.

   2.2. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3. **Une autre expression de f''**

   On note i un nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

   3.1. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ |e^{(i\theta - x)t}| = e^{-xt}$.

   3.2. En déduire que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \lim\limits_{t \to +\infty} |e^{(i\theta - x)t}| = 0$.

   3.3. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

   On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$.

4. **Une autre expression de f**

   4.1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

   4.2. Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

   4.3. Calculer la dérivée de G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = t\ln(t^2 + 4) - 2t + 4\arctan\left(\frac{t}{2}\right)$.

   4.4. Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5. Calculer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}\,t$.