

Exercice 1

1. • Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\chi_{M_a}(X) = \det \left(\begin{array}{c|cc} X-1 & -a & 0 \\ \hline 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{array} \right) = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$.

χ_{M_a} est donc scindé et M_a a donc deux valeurs propres : 1 (valeur propre double) et -1.

Par suite, M_a est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(M_a)) = 2$.

Or,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) \Leftrightarrow (M_a - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases},$$

donc,

— si $a \neq 0$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) \Leftrightarrow y = z = 0$, donc $E_1(M_a) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est de dimension 1, donc M_a n'est pas diagonalisable.

— si $a = 0$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(M_a) \Leftrightarrow y = z$, donc $E_1(M_a) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est de dimension 2, donc M_a est diagonalisable.

Conclusion : M_a est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, 0 n'est pas valeur propre de M_a , donc M_a est diagonalisable.

3. Soit $a \neq 0$. Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a .

Montrer que M_a est semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ revient à montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans

laquelle la matrice de u est A .

Analyse : Si une telle base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ existe, alors on a :

— $u(e_1) = -e_1$, donc e_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre -1.

Or

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}(M_a) \Leftrightarrow (M_a + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + ay = 0 \\ y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -y \\ x = -\frac{a}{2}y \end{cases}.$$

On peut choisir $e_1 = (-a/2, 1, -1)$.

— $u(e_2) = e_2$, donc, d'après la première question, on peut choisir $e_2 = (1, 0, 0)$.

— $u(e_3) = e_2 + e_3$, donc, en posant $e_3 = (x, y, z)$, on a :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ay = 1 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/a \\ z = 1/a \end{cases}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir $e_3 = (0, 1/a, 1/a)$.

Synthèse : Réciproquement, avec de tels choix pour e_1, e_2 et e_3 ,

— la matrice de la base canonique de (e_1, e_2, e_3) est $P = \begin{pmatrix} -a/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/a \\ -1 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$ et, comme $\det(P) = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1/a \\ -1 & 1/a \end{vmatrix} = -2/a \neq 0$

(en développant par rapport à la deuxième colonne), P est inversible, donc $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

— Par construction, on a $u(e_1) = -e_1$, $u(e_2) = e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est A , donc A et M_a sont semblables.

Exercice 2

1. Soit $x \geq 0$.

φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $t \geq 0$, $|\varphi_x(t)| = \frac{e^{-t}}{1+xt} \leq e^{-t}$.

Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car de la forme $t \mapsto e^{-at}$ avec $a = 1 > 0$), donc, par comparaison, φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, $f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt$ existe.

f est donc bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+$ avec $x < y$.

Pour tout $t \geq 0$, $0 < 1+tx \leq 1+ty$, donc $\frac{1}{1+tx} \geq \frac{1}{1+ty}$, donc $\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{1+xt} \geq \frac{e^{-t}}{1+yt} = \varphi_y(t)$.

D'où, par positivité de l'intégrale convergente (avec " $0 \leq +\infty$ "), on a :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \geq \int_0^{+\infty} \varphi_y(t) dt.$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3. Limite de f en l'infini

(a) Appliquons le théorème de convergence dominée :

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+nt = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(t) = 0$.

La suite de fonction $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, qui est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t > 0$, $1+nt \geq 1$, donc

$$|\varphi_n(t)| = \frac{e^{-t}}{1+nt} \leq e^{-t} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car de la forme $t \mapsto e^{-at}$ avec $a = 1 > 0$).

D'où, par convergence dominée, la fonction nulle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (mais ce n'est pas nouveau !) et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

J'ai choisi de faire de la convergence dominée sur $\mathbb{R}_+^$ au lieu de $\mathbb{R}_+$ car j'ai le droit de le faire et cela m'a évité d'avoir à considérer le cas $t = 0$ pour la convergence simple.*

(b) $\ell = 0$ d'après la question précédente.

(c) La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle admet une limite en $+\infty$ (finie ou $-\infty$). De plus, par caractérisation séquentielle de la limite, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0.$$

Exercice 3

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k n - k + 2.$$

1. Montrons par récurrence forte sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$ (HR_n).

Initialisation : Par hypothèse, $a_0 = 1 \in]0, 1]$, donc on a bien HR_0 .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k n - k + 2 \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} 1 n - k + 2 \quad (\text{d'après } HR_k, \text{ pour } 0 \leq k \leq n) \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1 \\ \text{et } a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} a_k n - k + 2 \\ &> \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} 0 n - k + 2 \quad (\text{d'après } HR_k, \text{ pour } 0 \leq k \leq n) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc on a bien HR_{n+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq 1$.

2. Pour $x = 1$, la suite $(a_n x^n) = (a_n)$ est bornée, donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

3. (a) Soit $x \neq 0$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n+2}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq 0$ et

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \frac{(n+3)|x|}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|,$$

donc, d'après le critère de d'Alembert pour les séries numériques,

— si $|x| < 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ converge (absolument), donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ est supérieur ou égal à 1

— si $|x| > 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ diverge (grossièrement), donc le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ est inférieur ou égal à 1

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ est donc égal à 1.

(b) Comme le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$, l'ensemble réel de définition D de la fonction $x \mapsto \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ vérifie

$$]-1, 1[\subset D \subset [-1, 1].$$

Pour $x = 1$, on a $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2}$ qui diverge (série harmonique), donc $1 \notin D$.

Pour $x = -1$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ est une série alternée et, comme $\left(\left| \frac{(-1)^n}{n+2} \right| \right) = \left(\frac{1}{n+2} \right)$ tend en décroissant vers 0, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge d'après le critère des séries alternées, donc $-1 \in D$.

L'ensemble de définition recherché est donc $[-1, 1[$.

(c) Les deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, donc $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$, qui est le produit de Cauchy de ces deux séries entières, a aussi un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

De plus, par définition du produit de Cauchy de deux séries (entières), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+2} \times a_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_k \times \frac{1}{n-k+2} = (n+1)a_{n+1}.$$

(d) Par suite, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = f'(x). \end{aligned}$$

4. • f est donc solution sur $]-1, 1[$ de l'équation différentielle $y' - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) y = 0 \quad (E)$.

Or une primitive sur $]-1, 1[$ de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$ est $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$, donc les solutions de (E) sur $]-1, 1[$ sont

$$x \mapsto K \exp \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \right), \text{ où } K \in \mathbb{R}.$$

De plus, $f(0) = a_0 = 1$, donc on a $K e^0 = 1$, donc $K = 1$, et, par suite, $f : x \mapsto \exp \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \right)$.

• Par suite, on a bien, pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

A priori, l'énoncé n'attendait pas l'utilisation d'équations différentielles, mais...

5. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$ convergent et, pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x} (-\ln(1-x) - x) = 1 + \ln(1-x) \frac{1-x}{x} \end{aligned}$$

donc $f(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right) = \exp\left(1 + \ln(1-x)\frac{1-x}{x}\right) = e(1-x)^{\frac{1-x}{x}}$. Pour $x = 0$, $f(x) = 1$, donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e(1-x)^{\frac{1-x}{x}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}.$$

6. Comme $1/2 \in]-1, 1[$ est à l'intérieur du disque ouvert de convergence de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = e\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1-1/2}{1/2}} = \frac{e}{2}.$$

Exercice 4

1. (a) • On a $2M^2 = 3M - I_n$, donc, par opération de Gauss,

$$F = \text{Vect}(I_n, M, M^2) = \text{Vect}(I_n, M, 2M^2 - 3M + I_n) = \text{Vect}(I_n, M, 0_n) = \text{Vect}(I_n, M).$$

• Montrons alors par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.

Initialisation : $M^0 = I_n \in \text{Vect}(I_n, M) = F$.

$M^1 = M \in \text{Vect}(I_n, M) = F$.

On a donc bien HR_1 et HR_2 .

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons HR_k vérifiée.

Alors, comme $M^k \in \text{Vect}(I_n, M)$, il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{R}^2$ tels que $M^k = a_k I_n + b_k M$, donc on a :

$$M^{k+1} = M^k M = a_k M + b_k M^2 = a_k M + b_k \frac{3M - I_n}{2} = \frac{2a_k + 3b_k}{2} M - \frac{b_k}{2} I_n,$$

donc $M^{k+1} \in \text{Vect}(I_n, M) = F$. On a bien HR_{k+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$. • On a $F = \text{Vect}(I_n, M)$, donc la famille (I_n, M) est génératrice de F .

S'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $aI_n + bM = 0$, alors $b \neq 0$ car sinon on a $aI_n = 0$, donc $a = 0$.

On a donc $M = -\frac{a}{b}I_n$. Posons alors $\lambda = -\frac{a}{b}$.

Comme $M = \lambda I_n$, on a $M^2 = \lambda^2 I_n$, donc

$$0_n = 2M^2 - 3M + I_n = (2\lambda^2 - 3\lambda + 1)I_n,$$

donc $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 1/2$, ce qui est exclu car $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$.

La famille (I_n, M) est donc aussi libre.

C'est donc une base de F , qui est donc de dimension 2.

(b) Pour tout $A = aI_n + bM \in \text{Vect}(I_n, M) = F$, pour tout $B = cI_n + dM \in \text{Vect}(I_n, M) = F$,

$$AB = acI_n + (bc + ad)M + bdM^2 \in \text{Vect}(I_n, M, M^2) = F.$$

L'ensemble F est donc bien stable pour la multiplication.

(c) • $A = M - I_n \in \text{Vect}(I_n, M) = F$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n \in \text{Vect}(I_n, M) = F$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} aA + bB = 0 &\Leftrightarrow (a+b)M - (a+b/2)I_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+b/2=0 \end{cases} \quad (\text{car } (I_n, M) \text{ est libre}) \\ &\Leftrightarrow a = b = 0, \end{aligned}$$

donc la famille (A, B) est libre.

La famille (A, B) est libre et formée de deux éléments de F , espace vectoriel de dimension 2, donc c'est une base de F .

• On a

$$AB = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \left(\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n\right) - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n = 0 = 0A + 0B$$

$$BA = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n = 0A + 0B$$

$$A^2 = M^2 - 2M + I_n = \left(\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n\right) - 2M + I_n = -\frac{1}{2}(M - I_n) = -\frac{1}{2}A + 0B$$

$$B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4}I_n = \left(\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n\right) - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}\left(M - \frac{1}{2}I_n\right) = 0A + \frac{1}{2}B.$$

(d) On a $M = 2B - A$.

Soit $T \in F$. Alors, comme (A, B) est une base de F d'après la question précédente, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $T = aA + bB$.

D'où

$$\begin{aligned} T^2 = M &\Leftrightarrow (aA + bB)^2 = M \Leftrightarrow a^2 A^2 + abAB + abBA + b^2 B^2 = M \\ &\Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}A + \frac{b^2}{2}B = M \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2}A + \frac{b^2}{2}B = 2B - A \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -a^2/2 = -1 \\ b^2/2 = 2 \end{cases} \quad (\text{car } (A, B) \text{ est libre}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{2}b = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a donc 4 matrices dans F qui vérifient $T^2 = M$

$$\sqrt{2}A + 2B, \quad -\sqrt{2}A + 2B, \quad \sqrt{2}A - 2B \quad \text{et} \quad -\sqrt{2}A - 2B.$$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2p_{n+2} - 3p_{n+1} + p_n = 0$, donc p_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Son équation caractéristique : $2r^2 - 3r + 1 = 0$ a pour racines $1/2$ et 1 , donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = \lambda 1^n + \mu \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lambda + \frac{\mu}{2^n}.$$

La série de terme général p_n converge et sa somme est égale à 1.

Or, si $\lambda \neq 0$, $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \neq 0$, donc la série $\sum_{n \geq 0} p_n$ diverge, donc, par l'absurde, on a $\lambda = 0$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{\mu}{2^n}$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{\mu}{1 - 1/2} = 2\mu \quad (\text{série géométrique de raison } 1/2 \in]-1, 1[),$$

donc, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, on a $2\mu = 1$, donc $\mu = 1/2$.

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Réciproquement, pour une telle valeur de p_n , on a $p_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - 1/2} = 1$, donc il existe bien une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $P(X = n) = p_n$.

(b) • Pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum_{n \geq 1} x^{n-1}$ converge absolument et sa somme vaut $\frac{1}{(1-x)^2}$ (série entière dérivée de géométrie).

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $nP(X = n) = \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, donc, comme $1/2 \in]-1, 1[$, la série $\sum_{n \geq 0} nP(X = n) = 0 \sum_{n \geq 1} nP(X = n)$ converge absolument, donc X admet une espérance, et $E(X) = \frac{1}{4} \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1$.

• Sous réserve de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) + n}{2^{n+1}} = \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Or ces deux séries convergent (dérivées de géométrie de raison $1/2 \in]-1, 1[$), donc la série de départ converge, donc converge absolument (série à termes positifs), donc, d'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe et

$$E(X^2) = \frac{1}{8} \frac{2}{(1 - 1/2)^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 3.$$

• X admet un moment d'ordre 2, donc X admet une variance et, d'après la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 3 - 1 = 2.$$

Rq : J'ai déjà varié un peu les rédactions pour l'espérance et la variance, mais il y a plein d'autres façons de procéder. On peut notamment ici :

— Calculer la série génératrice de X :

$$G_X : t \in]-2, 2[\mapsto \frac{1}{2-t}.$$

Comme G_X est deux fois dérivable en 1, X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = G'_X(1) \quad \text{et} \quad V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

— Montrer que $Z = X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$.

Alors Z admet une espérance et une variance, donc $X = Z - 1$ aussi et

$$E(X) = E(Z - 1) = E(Z) - 1 \quad \text{et} \quad V(X) = V(Z - 1) = V(Z).$$

Exercice 5

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini sur $E \times E$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
 - Pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ par symétrie du produit dans $\mathbb{R}$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
 - Pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda P + Q, R \rangle &= (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P + Q)'(1)R'(1) + (\lambda P + Q)''(1)R''(1) \\
 &= (\lambda P + Q)(1)R(1) + (\lambda P' + Q')(1)R'(1) + (\lambda P'' + Q'')(1)R''(1) \quad (\text{par linéarité de la dérivation}) \\
 &= (\lambda P(1) + Q(1))R(1) + (\lambda P'(1) + Q'(1))R'(1) + (\lambda P''(1) + Q''(1))R''(1) \quad (\text{par linéarité de l'évaluation}) \\
 &= \lambda(P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1)) + Q(1)R(1) + Q'(1)R'(1) + Q''(1)R''(1) \\
 &= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle,
 \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
- Pour tout $P \in E$,

$$\langle P, P \rangle = (P(1))^2 + (P'(1))^2 + (P''(1))^2 \geq 0$$

comme somme de termes positifs et

$$\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow P(1) = P'(1) = P''(1) = 0,$$

car une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chacun des termes est nul.

Par suite, si $\langle P, P \rangle = 0$, alors 1 est une racine au moins triple de P , qui est un polynôme de degré au plus 2, donc $P = 0$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est donc défini positif.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit donc bien un produit scalaire sur E .

- $(1, X, X^2)$ est une base de E . Appliquons lui le procédé de Gram-Schmidt.

- $\langle 1, 1 \rangle = 1$, donc on pose $P_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$.
- $\langle X, 1 \rangle = 1$, donc on pose $Q_2 = X - 1$.

On a alors $\langle X - 1, X - 1 \rangle = 0 + 1 = 1$, donc on pose $P_2 = \frac{X - 1}{\sqrt{1}} = (X - 1)$.

- $\langle X^2, X - 1 \rangle = 0 + 2 = 2$, $\langle X^2, 1 \rangle = 1$, donc on pose $P_3 = X^2 - 2(X - 1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

On a alors $\langle (X - 1)^2, (X - 1)^2 \rangle = 0 + 0 + 4$, donc on pose $Q_3 = \frac{(X - 1)^2}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}(X - 1)^2$.

- La famille $\left(1, X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2\right)$ est alors une base orthonormée de E pour le produit scalaire considéré.

- La famille $(1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.

Le projeté orthogonal de U sur $\mathbb{R}_1[X]$ est donc

$$V = \langle U, 1 \rangle 1 + \langle U, X - 1 \rangle (X - 1) = -3 + 2(X - 1).$$

Par suite, $d(U, \mathbb{R}_1[X]) = d(U, V) = \sqrt{\langle U - V, U - V \rangle} = \sqrt{\langle X^2 - 2X + 1, X^2 - 2X + 1 \rangle} = \sqrt{\langle (X - 1)^2, (X - 1)^2 \rangle} = \sqrt{4} = 2$.

On aurait pu décomposer U sur la base obtenue à la question précédente sous la forme :

$$U = \underbrace{2 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2}_{\in \mathbb{R}_1[X]^\perp} + \underbrace{2(X - 1) - 3}_{\in \mathbb{R}_1[X]}$$

et on a alors directement

$$d(U, \mathbb{R}_1[X]) = \left\| 2 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2 \right\| = 2 \left\| \frac{1}{2}(X - 1)^2 \right\| = 2.$$

- Par linéarité de l'évaluation, $\psi : P \in E \mapsto P(1)$ est une application linéaire, donc $H = \text{Ker}(\psi)$ est un sous-espace vectoriel de E .

ψ est non nulle, car $\psi(1) = 1 \neq 0$, donc $\text{rg}(\psi) \geq 1$.

De plus, $\text{Im}(\psi) \subset \mathbb{R}$, donc $\text{rg}(\psi) \leq 1$, et, par suite, $\text{rg}(\psi) = 1$.

D'où, d'après le théorème du rang, on a $\dim H = \dim(\text{Ker} \psi) = \dim E - \text{rg}(\psi) = 3 - 1 = 2$.

- On remarque de plus que $(X - 1)$ et $\frac{1}{2}(X - 1)^2$ sont des éléments de H , donc la famille $\left(X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2\right)$ est une famille libre formée de 2 éléments de H , espace vectoriel de dimension 2, donc c'est une base (orthonormée) de H .

De plus, comme $\left(1, X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2\right)$ est une base orthonormée de E , on a $H^\perp = \text{Vect}(1)$.

Enfin, on a

$$\begin{aligned}1 &= 1 + 0(X - 1) + 0 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2, \\X &= 1 + 1(X - 1) + 0 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2, \\ \text{et } X^2 &= 1 + 2(X - 1) + 2 \times \frac{1}{2}(X - 1)^2,\end{aligned}$$

donc

$$\varphi(1) = 0, \quad \varphi(X) = X - 1 \quad \text{et} \quad \varphi(X^2) = (X - 1)^2 + 2(X - 1) = X^2 - 1,$$

donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$