Corrigé du sujet E3A 2019: Math 1

Exercice 1.

1 . La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

2 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2.1. $\diamond$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $s_{p+1} - s_p = \frac{1}{n+1+p} > 0$.

$\boxed{\text{Donc la suite } (s_p)_{p\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

$\diamond$ Or la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est une série à termes positifs divergente. Donc $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} = +\infty$.

Or $s_p = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Donc $\lim_{p\to+\infty} S_p = +\infty$.

$\boxed{\text{Ainsi la suite } (s_p)_{p\geqslant 1} \text{ diverge.}}$

2.2. Par définition comme $\lim_{p\to+\infty} s_p = +\infty$,

$$\forall A > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant p_0,\ s_p \geqslant A$$

En particulier pour un réel $A > 1$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant p_0$, $s_p \geqslant A > 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi il existe au moins un entier naturel } p \text{ tel que l'on ait : } \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1.}$$

3 . Par définition de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \in \mathbb{N}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geqslant n$.
Or $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

$\boxed{\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.}$

4 . $\diamond$ Remarquons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$.

Donc en sommant ces inégalités, $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n}$.

En additionnant $\frac{1}{n}$ à cette inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} < \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1.}$$

$\diamond$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=n}^{2n-2} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{3n-2-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} \right) + \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}$$

Or $\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ a \neq b\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{4}{a+b}$, car $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$.

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \dfrac{1}{n+k} + \dfrac{1}{3n-2-k} > \dfrac{4}{4n-2}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{n+k} + \frac{1}{3n-2-k} \right) > \frac{2(n-1)}{2n-1}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > \frac{2(n-1)}{2n-1} + \frac{1}{2n-1}$.

$$\boxed{\text{Finalement } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} > 1.}$$

5 . D'après la définition de p_n et les inégalités précédentes, $n-1 \leqslant p_n \leqslant 2n-2$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2n-1 \leqslant a_n \leqslant 3n-2$.
Alors en divisant par n ($n > 0$), $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant 3 - \dfrac{2}{n}$.
Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. $\boxed{\text{Donc par passage à la limite } 2 \leqslant \ell \leqslant 3.}$

6 . Soit $n \geqslant 0$.

Par définition de p_n, $1 < \displaystyle\sum_{k=0}^{p_n} \frac{1}{n+k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p_n-1} \frac{1}{n+k} \leqslant 1$.

Donc $1 < \displaystyle\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } 1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}.}$$

7 . Soit n un entier non nul.

- Soit k un entier non nul.
  La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$.
  Donc $\forall t \in [k, k+1],\ \dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
  Donc en sommant sur k de n à $a_n - 1$,
  $$\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$
  Ou encore
  $$\sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k}$$
- Or d'après la question précédente, $1 < \displaystyle\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k}$. Donc $1 - \dfrac{1}{n} < \displaystyle\sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k}$.

  Et $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 - \frac{1}{n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{a_n} \frac{1}{k} \leqslant \int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=n}^{a_n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1.}$$

8 .
- Remarquons que $\displaystyle\int_n^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(a_n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{a_n}{n}\right) = \ln(u_n)$.
  Ainsi d'après les questions précédentes, $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant \ln(u_n) \leqslant 1$.
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$.
  Donc par encadrement, la suite $\big(\ln(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = 1$.
  Par continuité de la fonction exp en 1, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } e.}$

Exercice 2.

1 . ◇ Supposons qu'il existe un réel a tel que Φ_a soit un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Alors $\Phi_a(X^{2n}) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$. Or $\Phi_a(X^{2n}) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) 2nX^{2n-1} + aX^{2n+1} = (a-2n)X^{2n+1} + \frac{n}{2}X^{2n-1}$.

Donc $a = 2n$.

◇ Si $a = 2n$, alors montrons que Φ_α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ et λ et μ deux réels.

$\Phi_\alpha(\lambda P + \mu Q) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)(\lambda P + \mu Q)' + 2nX(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi_a(P) + \mu \Phi_a(Q)$.

Et il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_{2n}$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$.

Donc $\Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) \sum_{k=1}^{2n} c_k k X^{k-1} + 2nX \sum_{k=0}^{2n} c_k X^k = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{4} c_k k X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n} c_k k X^{k+1} + 2n \sum_{k=0}^{2n} c_k X^{k+1}$.

Ainsi $\Phi_a(P) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{4} c_k k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{2n} c_k(2n-k)X^{k+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{4} c_k k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{2n-1} c_k(2n-k)X^{k+1}$.

Donc $\Phi_a(P) \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

Ainsi Φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

$\boxed{\text{Ainsi } \Phi_a \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_{2n}[X] \text{ si et seulement si } a = 2n.}$

2 . Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.

◇ Soit α et β deux éléments de $\mathbb{N}$ tel que $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$.

Or $\Phi_{2n}(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)\left(\alpha\left(X - \frac{1}{2}\right) + \beta\left(X + \frac{1}{2}\right)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{\beta-1} + 2nX\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$.

Alors $\Phi_{2n}(P) = \left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$.

Comme $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$, alors $\left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta = \lambda \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$

ou encore $\left((2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta - 2\lambda)\right)\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta = 0$.

Donc $(2n - \alpha - \beta)X + \frac{1}{2}(\alpha - \beta - 2\lambda) = 0$. Ainsi $\alpha + \beta = 2n$ et $\alpha - \beta = 2\lambda$. Alors $\alpha = n + \lambda$ et $\beta = n - \lambda$.

◇ Réciproquement si $\alpha = n+\lambda$ et $\beta = n-\lambda$, alors $\Phi_{2n}\left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta\right) = \frac{\alpha - \beta}{2}\left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$.

$\boxed{\text{Ainsi } P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta \text{ vérifie } \Phi_{2n}(P) = \lambda P \text{ si et seulement si } \alpha = n + \lambda \text{ et } \beta = n - \lambda.}$

3 . D'après la question précédente, pour tout entier λ de $[\![-n, n]\!]$ il existe un polynôme non nul $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ tel que $\Phi_{2n}(P) = \lambda P$.

Donc λ est une valeur propre de Φ_{2n}.

Ainsi Φ_{2n} est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{2n}[X]$ de dimension $2n+1$ admettant $2n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes.

Donc les sous espaces de Φ_{2n} sont des espaces vectoriels de dimension 1.

$\boxed{\text{Ainsi } Sp(\Phi_{2n}) = [\![-n, n]\!] \text{ et } \forall \lambda \in [\![-n, n]\!],\ E_\lambda(\Phi_{2n}) = \text{Vect}\left(\left(X + \frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(X - \frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}\right).}$

4 . Notons A la matrice de Φ_{2n}.

Rappelons que $\Phi_{2n}(1) = 2nX, \forall k \in [\![1, 2n-1]\!], \Phi_{2n}(X^k) = \frac{k}{4}X^{k-1} + (2n-k)X^{k+1}$ et $\Phi_{2n}(X^{2n}) = \frac{n}{2}X^{2n-1}$.

Donc les coefficients diagonaux de A sont nuls et $Sp(A) = Sp(\Phi_{2n}) = [\![-n, n]\!]$.

Comme tout vecteur non nul de $\mathscr{M}_{2n+1,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de I_{2n}, les valeurs propres de $A+nI_{2n+1}$ sont les entiers $\lambda+n$ où λ est une valeurs propres de A.
Les coefficients diagonaux de $B=A+nI_{2n+1}$ sont tous égaux à n.

Ainsi B est une matrice de $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à n et dont le spectre est $[\![0,2n]\!]$.

5 . Remarquons que les valeurs propres de la matrice B^2 sont les entiers $0,1,4,9,\cdots,4n^2$.
Or B^2 est la matrice de l'endomorphisme $(\phi_{2n}+n\,\mathrm{Id})^2$.

Ainsi l'endomorphisme de E, $\Psi=(\phi_{2n}+n\,\mathrm{Id})^2$ admet $0,1,4,9,\cdots,4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 3.

1 .1.1. ◇ Soient u et v deux éléments de $\mathscr{E}$ tels que $\Phi(u)=\Phi(v)$.
Alors $(u_0,u_1,u_2)=(v_0,v_1,v_2)$.
Supposons qu'il existe un entier n tel que $(u_n,u_{n+1},u_{n+2})=(v_n,v_{n+1},v_{n+2})$.
Comme u et v sont des éléments de $\mathscr{E}$, alors $u_{n+3}=u_n$ et $v_{n+3}=v_n$.
Or par hypothèse de récurrence, $u_n=v_n$. Donc $u_{n+3}=v_{n+3}$.
Ainsi $(u_{n+1},u_{n+2},u_{n+3})=(v_{n+1},v_{n+2},v_{n+3})$.
Donc par récurrence, pour tout entier n, $(u_n,u_{n+1},u_{n+2})=(v_n,v_{n+1},v_{n+2})$.
En particulier $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=v_n$.
Donc Φ est injective.

◇ Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.
Considérons la suite u définie par $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{3n}=a$, $u_{3n+1}=b$ et $u_{3n+2}=c$.
u est un élément de $\mathscr{E}$ et $\Phi(u)=(a,b,c)$.
Donc Φ est surjective.

Donc Φ est bijective.

1.2. ◇ Soient u et v deux éléments de $\mathscr{E}$ et λ et μ deux réels.
Alors $\Phi(\lambda u+\mu v)=(\lambda u_0+\mu v_0,\lambda u_1+\mu v_1,\lambda u_2+\mu v_2)=\lambda\Phi(u)+\mu\Phi(v)$.
Donc Φ est une application linéaire.

◇ Φ est une application linéaire bijective de $\mathscr{E}$ vers $\mathbb{R}^3$.
Donc les espaces vectoriels $\mathscr{E}$ et $\mathbb{R}^3$ ont même dimension.

Ainsi $\dim\mathscr{E}=3$.

2 .2.1. Comme Φ est un isomorphisme de $\mathscr{E}$ vers $\mathbb{R}^3$, l'image réciproque par Φ d'une base de $\mathbb{R}^3$ est une base de $\mathscr{E}$.

Donc $\mathscr{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathscr{E}$.

2.2. Comme $\Phi(\varepsilon_1)=\big((\varepsilon_1)_0,(\varepsilon_1)_1,(\varepsilon_1)_2\big)$ et que $\Phi(\varepsilon_1)=\big(1,0,0\big)$.
Donc $(\varepsilon_1)_0=1$, $(\varepsilon_1)_1=0$ et $(\varepsilon_1)_2=0$.
Or $\varepsilon_1\in\mathscr{E}$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\varepsilon_1)_{3n}=1$, $(\varepsilon_1)_{3n+1}=(\varepsilon_1)_{3n+2}=0$.
De même $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\varepsilon_2)_{3n}=0$, $(\varepsilon_2)_{3n+1}=1$ et $(\varepsilon_2)_{3n+2}=0$.
Et $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\varepsilon_3)_{3n}=0$, $(\varepsilon_3)_{3n+1}=0$ et $(\varepsilon_3)_{3n+2}=1$.
Réciproquement les suites ainsi définies conviennent.

Donc ε_1 est la suite dont les termes d'indice multiple de 3 sont égaux à 1 et les autres nuls, ε_2 la suite dont les termes d'indice égal 1 modulo 3 sont égaux à 1 et les autres nuls et enfin ε_3 la suite dont les termes d'indice égal 2 modulo 3 sont égaux à 1 et les autres nuls

3 . $\diamond$ $\forall (u,v) \in \mathscr{E}^2$, $(u|v) \in \mathbb{R}$.

$\diamond$ $\forall (u,v) \in \mathscr{E}^2$, $(u|v) = (v|u)$.

$\diamond$ $\forall (u,v,w) \in \mathscr{E}^3$, $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\big((\alpha u + \beta w)|v\big) = \sum_{i=0}^{2} (\alpha u_i + \beta w_i) v_i = \alpha \sum_{i=0}^{2} u_i v_i + \beta \sum_{i=0}^{3} w_i v_i = \alpha (u|v) + \beta (w|v).$$

Et par symétrie $(u,v) \longmapsto (u|v)$ est bilinéaire.

$\diamond$ $\forall u \in \mathscr{E}$, $(u|u) = \displaystyle\sum_{i=0}^{2} u_i^2 \geqslant 0$.

$\diamond$ Soit u un vecteur de $\mathscr{E}$ tel que $(u|u) = 0$. Alors $\displaystyle\sum_{i=0}^{2} u_i^2 = 0$. Donc $\forall i \in [\![0,2]\!], u_i = 0$.

Ou encore $\Phi(u) = 0$. Or Φ est bijective, donc $u = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u,v) \longmapsto (u|v) \text{ définit un produit scalaire sur } \mathscr{E}.}$$

4 . D'après la question 2, la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{E}$.
Remarquons que $(\varepsilon_1|\varepsilon_1) = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1$. De même $(\varepsilon_2|\varepsilon_2) = 1$ et $(\varepsilon_3|\varepsilon_3) = 1$.
Et $(\varepsilon_1|\varepsilon_2) = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 = 0$. De même $(\varepsilon_1|\varepsilon_3) = 1$ et $(\varepsilon_2|\varepsilon_3) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathscr{B} \text{ est une base orthonormée de } \mathcal{E}.}$$

5 .5.1. $\diamond$ Soient u et v deux éléments de $\mathscr{E}$ et α et β deux réels.
Alors $d(\alpha u + \beta v)$ est la suite w définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}$.
Donc $d(\alpha u + \beta v) = \alpha d(u) + \beta d(v)$.
Ainsi d est une application linéaire.

$\diamond$ Soit u un élément de $\mathscr{E}$.
Notons à nouveau w la suite $d(u)$.
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = u_{n+4} = u_{n+1} = w_n$. Donc $w \in \mathscr{E}$.

$$\boxed{\text{Finalement } d \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{E}.}$$

5.2. $d(\varepsilon_1) = \varepsilon_3$, $d(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $d(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.

$$\boxed{\text{Donc la matrice de } d \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5.3. Remarquons que $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$. Donc 1 est une valeur propre de D.

$$\chi_D(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} \underset{C_1 := C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ X-1 & X & -1 \\ X-1 & 0 & X \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & X & -1 \\ 1 & 0 & X \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la première ligne aux suivantes:

$$\chi_D(X) = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 1 & X \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{en développant par rapport} \\ \text{à la première colonne}}}{=} (X-1)\big((X+1)X + 1\big) = (X-1)(X^2 + X + 1).$$

D admet une unique valeur propre réelle 1 et 3 valeurs propres complexes 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
Alors D est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Donc } d \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

5.4. Les invariants par d sont les vecteurs x tels que $d(x) = x$ c'est à dire les éléments de $\mathrm{Ker}(d - id)$. Comme 1 est une racine de multiplicité 1 du polynôme caractéristique de D, $\mathrm{Ker}(D - I_3)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

Or $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}(D - I_3)$. Donc $\mathrm{Ker}(D - I_3) = Vect(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$ ou encore $\mathrm{Ker}(d - id) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi l'ensemble } \mathscr{D} \text{ des vecteurs invariants par } d \text{ est}\\ \ker(d - id) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\text{, c'est-à-dire que l'ensemble } \mathscr{D}\\ \text{des vecteurs invariants par } d \text{ est l'ensemble des suites constantes.}\end{array}}$$

5.5. $\diamond$ Soit u un élément de $\mathscr{E}$.

Alors $\|d(u)\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{3} u_n^2$. Or $u_3 = u_0$.

$\|d(u)\|^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{2} u_n^2 = \|u\|^2$.

$$\boxed{\text{Donc } d \text{ est une isométrie de } \mathscr{E}.}$$

$\diamond$ Soit u un élément de $\mathscr{E}$.

Posons $w = d(u)$, $\alpha = d(w) = d^2(u)$ et $\beta = d(\alpha) = d^3(u)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1}$, et $\alpha_n = w_{n+1} = u_{n+2}$ et $\beta_n = \alpha_{n+1} = u_{n+3}$.

Or u est un élément de $\mathscr{E}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = u_n$.

Ainsi $d^3(u) = u$.

$$\boxed{\text{Finalement } d^3 = \mathrm{Id}.}$$

5.6. Soit u un élément de H. Notons $w = d(u)$

$$\begin{aligned}
\big(d(u)|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\big) &= w_0 + w_1 + w_3 \qquad \text{car } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (1, 1, 1, 1, \cdots)\\
&= u_1 + u_2 + u_3 \qquad \text{par définition de } w\\
&= u_0 + u_1 + u_2 \qquad \text{car } u \in \mathscr{E}\\
&= \big(u|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\big)\\
&= 0 \qquad \text{car } u \in \mathcal{D}^\perp \text{ et } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \in \mathcal{D}
\end{aligned}$$

Or $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ engendre $\mathscr{D}$. Donc $d(u) \in \mathcal{D}^\perp$ c'est-à-dire $d(u) \in H$.

$$\boxed{\text{Ainsi } H \text{ est stable par } d.}$$

5.7. Notons $\tilde{d}$ l'endomorphisme $\tilde{d}$ induit par d à H.

$\tilde{d}$ est aussi une isométrie.

La matrice de d dans une base adaptée à la décomposition $\mathscr{D} \overset{\perp}{\oplus} H$ de $\mathscr{E}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}1 & 0_2\\ 0 & D_2\end{pmatrix}$$

où D_2 est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Donc $\det(d) = det(D_2) = \det(\tilde{d})$. Or $det(d) = 1$ (opposé du coefficient constant du polynôme caractéristique). Donc $\det(\tilde{d}) = 1$. $\tilde{d}$ est alors une rotation.

La matrice de d dans une base adaptée à la décomposition $\mathscr{D} \overset{\perp}{\oplus} H$ de $\mathscr{E}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

où θ est un réel de $[0, 2\pi[$.

D'après la question 52, $\mathrm{tr}(d) = 0$.

Or deux matrices semblables ont même trace. Donc $1 + 2\cos(\theta) = 0$, ou encore $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$.

Alors $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

$$\boxed{\text{Donc } d \text{ est une rotation d'axe } \mathrm{Vect}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) \text{ et d'angle } \theta.}$$

Exercice 4.

1 . Question de cours 1 : Pour tout z dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est infini.

2 . Question de cours 2 : Soit M et N deux matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ semblables. Alors il existe une matrice Q inversible telle que $M = QNQ^{-1}$.
Montrons par récurrence sur p que $M^p = QN^pQ^{-1}$.

- ◇ Si $p = 0$, alors $M^0 = I_d = QN^0Q^{-1}$.
- ◇ Soit p un entier naturel. Supposons que $M^p = QN^pQ^{-1}$.
  $M^{p+1} = M^P M = QN^pQ^{-1}M = QN^pQ^{-1}QNQ^{-1} = QN^{p+1}Q^{-1}$.
- ◇ Ainsi par le principe de récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}$, QN^pQ^{-1}.

$$\boxed{\text{Donc si } M \text{ et } N \text{ sont semblables, } M^p \text{ et } N^p \text{ sont semblables.}}$$

3 .3.1. Soit z un élément de $\mathbb{C}$.
$\exp(iz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!}$ et $\exp(-iz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}$.
Par linéarité $\exp(iz) - \exp(-iz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{n!}$.
Or si n est pair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$

$$(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k - (-1)^k\big)z^{2k} = 0$$

si n est impair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$

$$(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k + (-1)^k\big)iz^{2k+1} = 2i(-1)^k z^{2k+1}$$

Alors dans la somme de série précédente tous les termes pairs sont nuls, donc

$$\exp(iz) - \exp(-iz) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2i\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall z \in \mathbb{C},\ s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}.}$$

3.2. Comme précédemment par linéarité, $\exp(iz) + \exp(-iz) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n + (-iz)^n}{n!}$.
Or si n est pair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k$

$$(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k + (-1)^k\big)z^{2k} = 2(-1)^k z^{2k+1}$$

si n est impair c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $n = 2k+1$

$$(iz)^n - (-iz)^n = \big((-1)^k - (-1)^k\big)iz^{2k+1} = 0$$

Alors dans la somme de série précédente tous les termes impairs sont nuls, donc

$$\exp(iz) + \exp(-iz) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } \forall z \in \mathbb{C},\ c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}.}$$

4 . Pour tout entier n, $A^n = \gamma^n I_2$.

Donc pour tout entier m, $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1} I_2$.

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1}$ admet une limite quand m tend vers $+\infty$ et elle vaut $s(\gamma)$.

Donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \left(\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1} \right) I_2 = s(\gamma) I_2$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi(A) = s(\gamma) I_2.}$$

5 . On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.

5.1. Comme A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et que A admet deux valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc il existe une matrice } P \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ telle que :}\\ B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP.\end{array}}$$

5.2. ◇ Comme B est diagonale, pour tout entier n, $B^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$.

Et pour tout entier m, $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \end{pmatrix}$.

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1}$ admettent une limite quand m tend vers $+\infty$ et elles valent respectivement $s(\alpha)$ et $s(\beta)$. Donc $\varphi(B)$ existe.

Et $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi(B) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}.}$$

◇ L'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est une application linéaire sur l'espace vectoriel normé de dimension finie $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc l'application $M \longmapsto PMP^{-1}$ est continue.

Ainsi $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P\Big(\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} \Big) P^{-1} = P\Big(\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} \Big) P^{-1}$.

Or $\displaystyle P\Big(\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} \Big) P^{-1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} PB^nP^{-1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}$.

Donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P\Big(\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} \Big) P^{-1} = \varphi(A)$.

Et $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \varphi(B)$

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi(A) = P \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

6 . On suppose que les valeurs propres de A sont égales: $\beta = \alpha$.

6.1. α est une valeur propre de A. Donc il existe un vecteur e_1 de $\mathbb{R}^2$ vecteur propre de A. Alors $u(e_1) = \alpha e_1$
Notons e_2 un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que (e_1, e_2) forme une base de $\mathbb{R}^2$. (Un tel vecteur existe d'après le théorème de la base incomplète).
Alors il existe deux complexes x et y tels que $u(e_2) = ye_1 + xe_2$.
Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ dont les coefficients diagonaux sont exactement les valeurs propres de A, c'est-à-dire α, donc $x = \alpha$.

$$\boxed{\text{Ainsi il existe un complexe } y \text{ et une matrice } Q \text{ inversible tels que } \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ.}$$

6.2. Montrons par récurrence sur n que $C^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

◇ Si $n = 0$, $C^0 = I_2$ et $\begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} = I_2$

◇ Soit n un entier fixé. Supposons que $C^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$.

$$C^{n+1} = CC^n = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0\alpha & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} & n\alpha^n y + \alpha^n y \\ 0 & \alpha^{n+1} \end{pmatrix}.$$

◇ Finalement par le principe de récurrence, pour tout entier n, $C^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$

6.3. Par la continuité de $M \longmapsto QMQ^{-1}$, $\varphi(A) = Q\Big(\lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} C^{2n+1}\Big)Q^{-1}$.

Or $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C^{2n+1} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n}y \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\alpha^{2n+1} \end{pmatrix}$.

Remarquons que $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n}y = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\alpha^{2n}y$.

Donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2n+1)\alpha^{2n}y = c(\alpha)y$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi(A) = Q \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix} Q^{-1}.}$$

7 . Soit A une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
A admet alors au moins une valeur propre complexe et au plus deux.
Ainsi soit $Sp(A) = \{\alpha\}$ soit $Sp(A) = \{\alpha, \beta\}$.
Le premier cas vient d'être traité à la question **??** et le deuxième à la question 5.

$$\boxed{\text{Ainsi } \varphi(A) \text{ existe pour toute matrice } A \text{ de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).}$$

8 . Supposons qu'il existe une matrice X telle que $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Parmi les expressions obtenues de $\varphi(A)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable uniquement à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$, donc X admet une seule valeur propre α et $s(\alpha) = 1$. Et il existe un complexe y tel que

$yc(\alpha) = 2019$.

$$
\begin{aligned}
\text{Or } \big(s(\alpha)\big)^2 + \big(c(\alpha)\big)^2 & \quad \left(\frac{1}{2i}\left[exp(i\alpha) - \exp(-i\alpha)\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left[exp(i\alpha) + \exp(-i\alpha)\right)\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\big(exp(2i\alpha) + exp(-2i\alpha) - 2\big) + \frac{1}{4}\big(exp(2i\alpha) + exp(-2i\alpha) + 2\big) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Donc $c(\alpha) = 0$. Alors l'égalité $yc(\alpha) = 2019$ n'est pas vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi il n'existe pas de matrice } X \text{ de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ telle que } \varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$