Exercice 1

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n(x) = \frac{1}{n^x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.
2. Soit $a \in]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
   Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.
   (b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.
4. Préciser le sens de variation de ζ.
5. On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.
   (a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\forall x \geq 2,\ 1 \leq \zeta(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
   (c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.
6. On considère à présent $h \in]0;\ +\infty[$.
   A l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.
7. Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.
8. On pose : $\forall x \in]0;\ +\infty[,\ F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.
   (a) Justifier que F est bien définie.
   (b) Monter que F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\,\zeta(x)$.
   (d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Exercice 2

On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,\ q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1. Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0\,{}^tV_0$.
   (a) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
   (b) Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
   (c) i. Calculer A_0U_0.
   ii. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   iii. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

2. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.
   (a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.
   Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 \cdots l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.
   (b) Vérifier que $LC = \mathrm{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A.
   (c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.
   Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{tr}(A)\}$.
   (d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
   (e) Vérifier que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.
   (f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
   On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   (a) Montrer que $f(u) \neq 0$.
   (b) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.
   (c) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ, c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(X = j) = \dfrac{\lambda^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$.

1. (a) Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(X \geq i) \leq \dfrac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.
   Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\mathrm{P}(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?
3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :
$$\forall i \in \mathbb{N}^*,\ u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i \geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ R_{n,k} = \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \displaystyle\sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.
4. (a) Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\mathrm{P}(X \geq k) \leq \dfrac{k}{k - \lambda}\,\mathrm{P}(X = k)$.
   Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $\mathrm{P}(X > k) \leq \mathrm{P}(X = k)$.
   (b) Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \dfrac{1}{2}$.
   Montrer à l'aide des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq i) \leq 1$.
   (c) Dans le cas général, que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq i)$? Le justifier.

5. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{\lambda}{n}\right)$.
   (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leq \mathrm{e}^{-t}$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\},\ \binom{n}{k} \leq \dfrac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\,\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \dfrac{(k-1)k}{2n}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\},\ \mathrm{P}\left(Y = k\right) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \dfrac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.
   (d) Quelle majoration de $\mathrm{P}\left(Y = k\right)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$?
   (e) En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$: $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}\left(Y = j\right) \leq \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$.

Exercice 4

On dit qu'un entier naturel n est premier si, et seulement si, il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

0 et 1 ne sont donc pas des nombres premiers. Par contre, 3 est un nombre premier puisque l'ensemble de ses diviseurs est exactement $\{1,\ 3\}$.

Toutes les fonctions demandées ci-après seront à réaliser dans le langage Python.

On pourra au fil des questions utiliser les fonctions construites dans les questions précédentes.

1. Ecrire une fonction `divise(p,q)` d'argument deux entiers naturels non nuls p et q, renvoyant True si p divise q et False sinon.
2. Ecrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant 1 si p est premier et 0 sinon.
3. Ecrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel p, renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à p.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n.
   Pour la suite de l'exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers :
   $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln(n)}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\Theta(n) = \left|\dfrac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1\right|$.
   (a) Rappeler la définition de deux suites équivalentes (les suites envisagées seront supposées n'avoir aucun terme nul).
   (b) Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.
   (c) Ecrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel *epsilon* strictement positif, renvoyant le premier entier naturel $N \geq 50$ tel que $\Theta(N) \leq$ *epsilon*.
   (d) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction Θ sur $[\![50;\ 5000]\!]$.