Exercice 1

1. L'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1;\ +\infty[$ car la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ converge si et seulement si $x>1$ (c'est du cours).

2. Soit $a\in]1;\ +\infty[$. On a alors : $\forall n\geq 1,\ \forall x>a,\ 0<\frac{1}{n^x}\leq\frac{1}{n^a}$ Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ converge, ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a;\ +\infty[$. Les applications $x\to\frac{1}{n^x}$ étant continues, la fonction ζ est alors continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$. L'élément a étant arbitrairement choisi dans $]1;\ +\infty[$, on en déduit la continuité de la fonction ζ sur $]1;\ +\infty[$.

3. (a) L'application f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et par récurrence immédiate sur k on a :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x)=\frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$$

.

(b) Soit $a\in]1;\ +\infty[$. On a alors : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\geq 1,\ \forall x>a,\ \left|f_n^{(k)}(x)\right|\leq\frac{(\ln(n))^k}{n^a}$.

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(\ln(n))^k}{n^a}$ converge, ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}f_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $[a;\ +\infty[$. La fonction ζ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$ et par suite sur $]1;\ +\infty[$ (car a est arbitrairement choisi dans $]1;\ +\infty[$), et on a : $\forall k\in\mathbb{N}^*\ \forall x>1\ \zeta^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

4. On a : $\forall x>1\ \zeta'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\ln(n)}{n^x}<0$. Ainsi, la fonction ζ est décroissante.

5. (a) La fonction ζ possède une limite finie en $+\infty$ car elle est décroissante et positive (donc minorée) sur $]1;\ +\infty[$.

(b) Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 2$. On a : $1\leq\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\leq\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

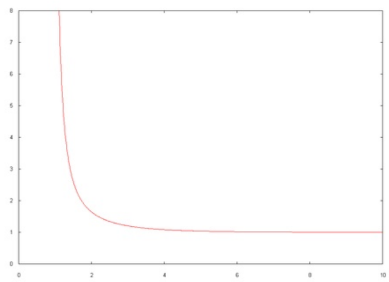
(c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}=1$, on a $1\leq\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)\leq 1+\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Et comme $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$. En déduire la valeur de limite de ζ en $+\infty$.

6. Soit $h\in]0;\ +\infty[$. L'application $t\mapsto\frac{1}{t^{1+h}}$ étant décroissante et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{1}{h}=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{h+1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^{h+1}}\leq\zeta(1+h)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{h+1}}\leq 1+\sum_{n=2}^{+\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t^{h+1}}=1+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^{h+1}}=1+\frac{1}{h}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{1}{h}$$

D'où : $\zeta(x)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{1}{x-1}$.

7. Allure de la représentation graphique de ζ



8. (a) Soit $x>0$. La suite réelle $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante de limite nulle. Le théorème spécial des séries alternées (TSSA) affirme alors que la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^x}$ converge. D'où l'existence de F.

(b) De plus, le TSSA affirme également que pour tout naturel $n \geq 1$, on a : $\forall x > 0$ $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}\right| \leq \frac{1}{n^x}$. Ainsi, pour $a > 0$, on a : $\forall x > a$ $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x}\right| \leq \frac{1}{n^a}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0$, cela prouve que la série de fonctions continues $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[a;\ +\infty[$. Ce qui prouve que F est continue sur $[a;\ +\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ (car a est arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}_+^*$).

(c) Soit $x > 1$. On a : $\zeta(x) + F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^x} = 2^{1-x} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2^{1-x}\,\zeta(x)$.

(d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{1-x} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = -1$.

Exercice 2

1. (a) On a : $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{rg}(A_0) = 1$.

(b) Notons : $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors la famille $(U_1,\ U_2,\ U_3)$ est libre et, pour tout $k \in \{1,\ 2,\ 3\}$, $A_0U_k = 0$. Ainsi, 0 est valeur propre de A_0 et une base du sous-espace propre associé est $(U_1,\ U_2,\ U_3)$ (car $\dim(\mathrm{Ker}(A_0)) = 4 - \mathrm{rg}(A_0) = 3$).

(c) i. On a $A_0U_0 = -2U_0$.

ii. Ainsi, U_0 est un vecteur propre associée à la valeur propre -2. On en déduit alors que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, puisque $(U_0,\ U_1,\ U_2,\ U_3)$ est une base de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A_0.

iii. Pour la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(-2,\ 0,\ 0,\ 0)$ et la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ on a $A_0 = PDP^{-1}$.

2. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

Comme le rang de A est 1, il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 \cdots l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que les colonnes de A soient successivement l_1C, l_2C,... et l_nC (la matrice L est bien non nulle car une des colonnes de A est C et le coefficient l_i correspondant vaut 1). Cela se traduit matriciellement par l'égalité $A = CL$.

(b) Le i-ème coefficient diagonal de A est c_il_i. D'où $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_il_i = LC$.

Puis $A^2 = C(LC)L = \mathrm{tr}(A)CL = \mathrm{tr}(A)A$.

(c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé. Ainsi $A^2X = \lambda^2X$ et $\mathrm{tr}(A)AX = \mathrm{tr}(A)\lambda X$. D'où : $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right) X = 0$ et par suite $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right) = 0$ puisque $X \neq 0$. On a bien $\lambda \in \{0,\ \mathrm{tr}(A)\}$.

(d) Le réel 0 est valeur propre de A car A n'est pas inversible. Le théorème du rang affirme que la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 0 est $n - \mathrm{rg}(A) = n - 1$.

(e) Soit $X \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{Ker}(A)$. Alors $AX \neq 0$ et $A^2X = \mathrm{tr}(A)AX$. Ainsi $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A (associée au vecteur propre AX).

(f) On sait que 0 est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$ et que le spectre de A est $\{0,\ \mathrm{tr}(A)\}$. Ainsi le polynôme caractéristique de A est scindé et vaut $X^{n-1}\,(X - \mathrm{tr}(A))$. Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ alors la dimension de chacun des espaces propres vaut l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante. Dans ce cas, A est diagonalisable. Si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors l'ordre de multiplicité de la valeur propre 0 est différente de la dimension de l'espace propre relatif. Dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

3. (a) Comme $f \circ f \neq \widetilde{0}$ il existe $v \in E$ tel que $f \circ f(v) \neq 0$. Comme $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = \alpha u$. Ainsi, $0 \neq f \circ f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u)$. D'où $f(u) \neq 0$.
   (b) Or il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Comme $f(u) \neq 0$, on en déduit que $u \neq 0$, $\lambda \neq 0$ et par suite λ est une valeur propre non nulle de f (associée au vecteur propre u).
   (c) Si on note A la matrice de l'endomorphisme f de E dans une base donnée, alors ce qui précède prouve que A est une matrice de rang 1 possédant une valeur propre non nulle (sa trace). A est donc diagonalisable. Et f l'est aussi.

Exercice 3

1. (a) Vu que la série $\sum j(j-1)\,\mathrm{P}(X=j)$ converge absolument, le théorème de transfert affirme que

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{j=0}^{+\infty} j(j-1)\,\mathrm{P}(X=j) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{(j-2)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda^2\,\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2.$$

   (b) La linéarité de l'espérance permet d'écrire $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}(X(X-1)+X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = \lambda^2 + \lambda$.
2. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$i^2\,\mathrm{P}(X \geq i) = i^2 \sum_{j=i}^{+\infty} \mathrm{P}(X=j) \leq \sum_{j=i}^{+\infty} j^2\,\mathrm{P}(X=j) \leq \mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

   D'où : $\forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}\left(X \geq i\right) \leq \dfrac{\lambda^2+\lambda}{i^2}$.
   Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{i^2}$ converge, il en est de même pour la série $\sum \mathrm{P}\left(X \geq i\right)$.
3. (a) On a $\lim\limits_{i \to +\infty} \frac{u_{i+1,k}}{u_{i,k}} = 0 < 1$. Ainsi la série $\sum\limits_{i \geq 1} u_{i,k}$, à termes réels strictement positifs, converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par la règle de D'Alembert.
   (b) On a $0 \leq u_{i,k} \leq \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i$. Ainsi, pour $k > \lambda$ on a $0 < \frac{\lambda}{k} < 1$ et la série géométrique de raison $\frac{\lambda}{k}$ converge. D'où pour toute constante $K \geq \lambda$ et pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} = \sum\limits_{i=n}^{+\infty} u_{i,k} \leq \sum\limits_{i=n}^{+\infty} \dfrac{\lambda^i}{k^i}$.
4. (a) Soit un entier k tel que $k > \lambda$. On a :

$$\mathrm{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathrm{P}(X=i) = \left(1 + \sum_{i=k+1}^{+\infty} u_{i-k,k}\right) \mathrm{P}(X=k) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^i \mathrm{P}(X=k) = \frac{k}{k-\lambda}\,\mathrm{P}(X=k).$$

   Si on a de plus $k \geq 2\lambda$, alors :

$$\mathrm{P}(X > k) = \mathrm{P}(X \geq k) - \mathrm{P}(x=k) \leq \left(\frac{k}{k-\lambda} - 1\right) \mathrm{P}(X=k) \leq \mathrm{P}(X=k).$$

   (b) Comme $k \geq 1 \geq 2\lambda$, on a :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X > k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X=j) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

   (c) Comme X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, dans le cas général, on a $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(X \geq i\right)$. C'est du cours ! Vous y trouverez une preuve !
5. (a) Une étude triviale des variations de la fonction réelle définie par $f(t) = \mathrm{e}^{-t} + t - 1$ montre qu'elle est à valeurs positives. D'où : $\forall t \in \mathbb{R},\ 1 - t \leq \mathrm{e}^{-t}$.
   (b) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n} \leq \frac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{k-1} i} = \frac{n^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\alpha(n,k)}.$$

(c) Soit $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$. On a : $\mathrm{P}(Y=k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \leq \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\alpha(n,k)}\, \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}(n-k)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{\beta(n,k,\lambda)}$.

(d) Soit $k \geq 2\lambda+1$. Alors $\beta(n,k,\lambda) \leq 0$ et par suite $\mathrm{P}(Y=k) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!} = \mathrm{P}(X=k)$.

(e) Soit $k \geq 2\lambda+1$. On a : $\sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}\left(Y=j\right) \leq \sum\limits_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}\left(X=j\right) \leq \mathrm{P}(X>k) \leq \mathrm{P}(X=k) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\,\lambda^k}{k!}$.

Exercice 4

1.
```
def divise(p,q):
    return q%p==0
```

2.
```
def estpremier(p):
    q = 2
    while q < p:
        if divise(q,p): return 0
        q += 1
    if p>1: return 1
    else: return 0
```

3. Un code (loin d'être efficace) possible est :

```
def phi(p):
    n,q = 0,2
    while q <= p:
        n += estpremier(q)
        q += 1
    return n
```

4. (a) Deux suites (a_n) et (b_n) à termes non nuls sont dite équivalentes si par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(b) Le théorème des nombres premiers implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln(n)} = +\infty$. D'où l'existence d'une infinité de nombres premiers.

(c) Par exemple :

```
def theta(N):
    from math import log
    return abs(((phi(N)*log(N))/N)-1)

def test(epsilon):
    N=50
    while True:
        if theta(N) <= epsilon: return N
        N += 1
```

(d) Sans aucune fioriture, on peut simplement écrire :

```
import matplotlib.pyplot as plt
X = [i for i in range(50,5001)]
Y = [theta(i) for i in X]
plt.plot(X,Y)
plt.show()
```

Ce qui donne :