e3a 2016 - PC math 1- Corrigé succint

Avertissement :
Il s'agit d'un corrigé succint, non destiné à être donné tel quel aux élèves. En particulier les questions de cours ne sont pas démontrées et certains raisonnements mériteraient une rédaction plus précise.

1 Exercice 1

A.

1. Il s'agit de l'inégalité de Schwarz .: cf cours.

2. Cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz(cf cours). $|\langle u_1, u_2\rangle| = \| u_1 \| \| u_2 \|$ si et seulement si (u_1, u_2) est un système lié.

B.

3. Comme $B = G(u_1, u_2)$, $a = \langle u_1, u_1\rangle \geq 0$, $d = \langle u_2, u_2\rangle \geq 0$, $b = \langle u_1, u_2\rangle = \langle u_2, u_1\rangle = c$ et d'après l'inégalité de Schwarz (A), $b^2 \leq \| u_1 \|^2 \| u_2 \|^2 = ad$ d'où $\det(B) = ad - bc \geq 0$.

4. Réciproquement si $a \geq 0, d \geq 0, \det(B) \geq 0$ et $b = c$. On considère une base orthonormée (e_1, e_2) de E.

Soit $\alpha = \sqrt{a}$ et $u_1 = \alpha e_1$. On a $\langle u_1, u_1\rangle = a$.

- Si $a > 0$, $\alpha > 0$. On cherche u_2 sous la forme $u_2 = xe_1 + ye_2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  $B = G(u_1, u_2) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = d \\ \alpha x = b \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{b}{\alpha} \\ y^2 = \frac{ad-b^2}{a} = \frac{ad-bc}{\alpha^2} \end{array}\right.$
  Comme $\det(B) = ad - bc \geq 0$, ce système admet des solutions.Par exemple $B = G(u_1, u_2)$ avec $u_1 = \alpha e_1$ et $u_2 = \frac{b}{\alpha} e_1 + \frac{\sqrt{\det(B)}}{\alpha} e_2$.
- Si $a = 0$, $u_1 = 0_E$
  $\det(B) = -b^2 \geq 0$ donc $b = 0$.On a alors $B = G(0_E, \sqrt{d} e_2)$.

Dans tous les cas B vérifie la propriété G.

5. Si B vérifie la propriété G. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $M = B^{\otimes p} = \begin{pmatrix} a^p & b^p \\ b^p & d^p \end{pmatrix}$ car $b = c$.

Comme $a \geq 0$ et $d \geq 0$, $a^p \geq 0$ et $d^p \geq 0$.

D'autre part $\det(B) \geq 0$ donc $ad \geq b^2 \geq 0$ et par croissance de $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$, $(ad)^p \geq b^{2p}$ donc $\det(M) \geq 0$.

On déduit de la question 4 que M vérifie la propriété G.

La réciproque étant claire, on en déduit que B vérifie la propriété G si et seulement si pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B^{\otimes p}$ vérifie la propriété G.

C.

6. On suppose que $C = G(u_1, u_2, u_3)$.

- **(a)** $\| u_1 \|^2 = 1$, $\| u_2 \|^2 = a$ et $\langle u_1, u_2\rangle^2 = 1$. D'après l'inégalité de Schwarz, $1 \leq a$. De même $\| u_3 \|^2 = 1$ et $\langle u_2, u_3\rangle^2 = b^2$ d'où $b^2 \leq a$.
- **(b)** $\| u_1 \| = \| u_3 \| = 1$ et $\langle u_1, u_3\rangle = 0$ donc (u_1, u_3) est orthonormale.
- **(c)** (u_1, u_3) est une base orthonormée de $P = \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ donc $v_2 = \langle u_1, u_2\rangle\, u_1 + \langle u_3, u_2\rangle\, u_3 = u_1 + bu_3$.
- **(d)** On a $\langle v_2, u_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle + b\langle u_3, u_2\rangle = 1 + b^2$ et $\| v_2 \|^2 = 1 + b^2$ car (u_1, u_3) est orthonormale.
  D'après l'inégalité de Schwarz, $\langle v_2, u_2\rangle^2 \leq \| v_2 \|^2 \| u_2 \|^2$ soit $(1+b^2)^2 \leq a(1+b^2)$ d'où $1+b^2 \leq a$ car $1+b^2 > 0$.

(e) Comme (u_1, u_3) est libre, si (u_1, u_2, u_3) est lié, $u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ d'où $u_2 = v_2$ et (u_2, v_2) est lié.

Réciproquement si (u_2, v_2) est lié, $u_2 \in \mathrm{Vect}(u_1, u_3)$ et (u_1, u_2, u_3) est lié.

Finalement, (u_1, u_2, u_3) est lié si et seulement si (u_2, v_2) est lié ce qui équivaut à $(1+b^2)^2 = a(1+b^2)$ d'après le cas d'égalité dans l'inégalité de Schwarz (A.2)

On en déduit que le système est libre si et seulement si $a > 1 + b^2$.

7. On suppose $a \geq 1 + b^2$.

(a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

$\begin{cases} \langle u, e_1 \rangle = 1 \\ \langle u, e_3 \rangle = b \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = b \end{cases}$

L'ensemble cherché est $\{e_1 + ye_2 + be_3\ ,\ y \in \mathbb{R}\}$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $u = e_1 + ye_2 + be_3$.

$G(e_1, u, e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 + y^2 + b^2 & b \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix}$.

$G(e_1, u, e_3) = C \Longleftrightarrow a - (1 + b^2) = y^2$

Comme $a \geq 1 + b^2$, cette équation admet (au moins) une solution $y = \sqrt{a - 1 - b^2}$ et C vérifie la propriété G.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $C^{\otimes p} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a^p & b^p \\ 0 & b^p & 1 \end{pmatrix}$, du même type que C.

D'après ce qui précède, $C^{\otimes p}$ vérifie la propriété G si et seulement si $a^p \geq 1 + b^{2p}$.

Or $a \geq 1 + b^2 \geq 0$ donc par croissance de $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$, $\quad a^p \geq (1 + b^2)^p \geq 1 + b^{2p}$

En effet par la formule du binôme,

$(1 + b^2)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^{2k} = 1 + b^{2p} + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} b^{2k} \geq 1 + b^{2p}$ car pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\quad b^{2k} \geq 0$.

D.

8. Pour tous f et g dans $\mathscr{E}$, $t \mapsto f(t)g(t)t^{p-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et

$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \left|f(t)g(t)t^{p-1}\right| \leq \dfrac{f(t)^2}{2} + \dfrac{g(t)^2 t^{2p-2}}{2}$.

Par définition de $\mathscr{E}$, les fonctions $t \mapsto f(t)^2$ et $t \mapsto g(t)^2 t^{2p-2}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$,

donc il en est de même pour $t \mapsto \dfrac{f(t)^2}{2} + \dfrac{g(t)^2 t^{2p-2}}{2}$ et par comparaison, la fonction $t \mapsto f(t)g(t)t^{p-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (ou encore l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)t^{p-1}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente).

9. $\langle\ ,\ \rangle_p$ est symétrique par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et linéaire à gauche par propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$ et linéarité des intégrales impropres convergentes. C'est donc une forme bilinéaire symétrique.

Pour tout $f \in \mathscr{E}$ $\quad \langle f, f \rangle_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 t^{p-1}\,\mathrm{d}t \geq 0$ car $\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t)^2 t^{p-1} \geq 0$

De plus la fonction $t \mapsto f(t)^2 t^{p-1}$ est continue, positive sur $]0, +\infty[$, donc

$\langle f, f \rangle_p = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in]0, +\infty[\quad f(t)^2 t^{p-1} \Longleftrightarrow \forall t \in]0, +\infty[\quad f(t) = 0 \Longleftrightarrow f = 0_{\mathscr{E}}$.

On en déduit que $\langle\ ,\ \rangle_p$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire sur $\mathscr{E}$.

10. La fonction h est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout polynôme P, la fonction $t \mapsto h(t)^2 P(t) = \mathrm{e}^{-2t} P(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et par croissances comparées, $\mathrm{e}^{-2t} P(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{-t}\right)$. Comme $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, par comparaison sur les fonctions intégrables, $t \mapsto h(t)^2 P(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc $h \in \mathscr{E}$.

11. Dans $I_p = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{p-1}\, dt$, on effectue le changement de variable $\mathscr{C}^1$ bijectif $x = \alpha t$ où $\alpha > 0$.

Si $t \to 0$, $x \to$ et si $t \to +\infty$, $x \to +\infty$. De plus formellement, $dx = \alpha\, dt$.

On déduit du théorème de changement de variable pour les intégrales convergentes que $I_p = \dfrac{\gamma_p}{\alpha^p}$.

12. *Rque : le calcul de γ_p n'est pas demandé .Il n'est pas non plus indispensable mais cela aurait pu être l'objet d'une question "facile"..*

$\gamma_p = \langle h_{1/2}, h_{1/2}\rangle_p > 0$ car $h_{1/2} \neq 0$ et $\langle\ ,\ \rangle_p$ est un produit scalaire.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ soit $u_i = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}} h_{\alpha_i} : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_p}} e^{-\alpha_i t}$.

D'après 11, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i \in \mathscr{E}$ et pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$,

$\langle u_i, u_j\rangle_p = \dfrac{1}{\gamma_p}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha_i+\alpha_j)t} t^{p-1}\, dt = \dfrac{1}{(\alpha_i+\alpha_j)^p}$

Soit E le sous espace vectoriel de l'espace préhilbertien $(\mathscr{E}, \langle\ ,\ \rangle_p)$ engendré par $u_1, \dots, u_n$. $(E, \langle\ ,\ \rangle_p)$ est un espace euclidien et $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E telle que $D^{\otimes p} = G(u_1, \dots, u_n)$

Est ce ce vraiment une question raisonnable dans un sujet d'e3a PC ?

2 Exercice 2

A.

1. F est continue sur $]-\infty, 0]$, sur $]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x) = 0 = F(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$: elle est donc continue en 0 et finalement continue sur $\mathbb{R}$.

2. F est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. $\forall x > 0$, $F'(x) = 0$ et $\forall x < 0$, $F'(x) = 2x$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F'(x) = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F'(x)$. D'après le théorème limite de la dérivée, F est dérivable en 0 de dérivée $F'(0) = 0$ et F' est continue en 0. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée F' y est continue.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F'(x) - F'(0)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{F'(x) - F'(0)}{x} = 2$: F' n'est pas dérivable en 0.

3. *Cette question est mathématiquement élémentaire mais un peu pénible en latex : joker ....*

B.

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On identifie abusivement cet espace à l'espace des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur à 2.

4. E_0 est un sous ensemble non vide (il contient toutes les fonctions de $\mathbb{R}_2[X]$) de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

Pour tous $f, g \in E_0$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

D'autre part comme $\mathbb{R}_2[X]$ est un espace vectoriel et que $f|_{]-\infty,0[}$ et $g|_{]-\infty,0[}$ sont des fonctions polynômiales de degré inférieur à 2, $f + \lambda g|_{]-\infty,0[}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2. De même $f + \lambda g|_{]0,+\infty[}$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 et donc $f + \lambda g \in E_0$.

E_0 est donc un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.

5. *Rque Au vu de la question A et de la question C, il y a une maladresse dans le texte. Il semble plus naturel de considérer que $H(x) = P(x)$ pour $x \leq 0$ et $H(x) = Q(x)$ pour $x > 0$.*

Je suppose le texte ainsi modifié , afin de simplifier la rédaction

Comme les fonctions P et Q sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la fonction H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si seulement si elle est continue en 0 et si les dérivées à gauche et à droite de H en 0 coïncident, ce qui équivaut à :

$\left\{\begin{array}{l} P(0)=Q(0) \\ P'(0)=Q'(0)\end{array}\right.$, ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} c=f \\ b=e\end{array}\right.$.

E_0 est donc l'ensemble des fonctions H telles qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $H(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si } x\leq 0 \\ dx^2+bx+c & \text{si } x>0\end{cases}$.

Soit f_1, f_2, f_3, f_4 les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$f_1 : x\mapsto 1, \quad f_2 ; x\mapsto x, \quad f_3=F \quad f_4 : x\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 & \text{si } x>0\end{cases}$.

Comme f_1 et f_2 sont des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degrés inférieurs à 2, elles sont dans E_0.

On a démontré en A que F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Ses restrictions à $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ sont polynomiales de degré inférieur à 2 donc $F\in E_0$. De la même façon, $f_4\in E_0$.

En reprenant les notations précédentes, si $H\in E_0$, $\exists(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \quad H=df_4+af_3+bf_2+cf_1$. La famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une famille génératrice de E_0. Reste à prouver qu'elle est libre.

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tels que $H=df_4+af_3+bf_2+cf_1=0$

Necessairement $H(0)=H'(0)=0$ donc $c=b=0$. On a aussi $H(1)=0$ d'où $d=0$ et $H(-1)=0$ d'où $a=0$.

La famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une base de E_0 .On a donc $\dim(E_0)=4$.

6.

(a) *élémentaire*

(b) Soit $H=df_4+af_3+bf_2+cf_1\in E_0$. On a $H(0)=c$, $H'(0)=b$ et $H(1)=d+b+c$.
On en déduit que $\Psi_0(H)=0 \iff b=c=d=0 \iff H\in\text{Vect}(f_3)$. Ou encore $\text{Ker}(\Psi_0)=\text{Vect}(f_3)$.

(c) D'après le théorème du rang, $\text{Im}\,\Psi_0$ est un sous espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension :
$\text{rg}(\Psi_0)=\dim(E_0)-\dim(\text{Ker}(\Psi_0))=3$ donc $\text{Im}(\Psi_0)=\mathbb{R}^3$ et Ψ_0 est surjective.

C.

7. De la même manière qu'en B.5, comme les fonctions f et P sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} f(\alpha)=P(\alpha) \\ f'(\alpha)=P'(\alpha)\end{array}\right.$.

Finalement $\left\{\begin{array}{l} H\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ H(\alpha+1)=w\end{array}\right. \iff (\Sigma)\left\{\begin{array}{l} a\alpha^2+b\alpha+c=u \\ 2a\alpha+b=v \\ a(\alpha+1)^2+b(\alpha+1)+c=w\end{array}\right.$

$(\Sigma)\iff\left\{\begin{array}{l} a\alpha^2+b\alpha+c=u \\ 2a\alpha+b=v \\ a=w-v-u\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a=-u-v+w \\ b=2\alpha u+(2\alpha+1)v-2\alpha w \\ c=(1-\alpha^2)u-\alpha(1+\alpha)v+\alpha^2 w\end{array}\right.$

Le système linéaire (Σ) admet une solution unique .

8. Il suffit dans les formules précédentes de poser $\alpha=\beta-1$.

Rque : la résolution du système n'étant pas explicitement demandée, on pouvait montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ (\alpha+1)^2 & (\alpha+1) & 1\end{pmatrix}$ *est inversible en calculant* $\det(M)$ *puis écrire un programme python résolvant le système en utilsant le module numpy.linalg*

```python
def prolonge(u,v,w,beta):
    al=beta-1
    return(-u-v+w,2*al*u+(2*al+1)*v-2*al*w,(1-al**2)*u-al*(al+1)*v+al**2*w)
```

D.

9.

(a) En généralisant le raisonnement effectué en B.5,

$H \in E \Longleftrightarrow \forall j \in [[0, n-1]],\quad \begin{cases} P_j(j) = P_{j+1}(j) \\ P'_j(j) = P'_{j+1}(j) \end{cases} \Longleftrightarrow \forall j \in [[0, n-1]],\quad \begin{cases} a_j j^2 + b_j j + c_j - a_{j+1} j^2 - b_{j+1} j - c_{j+1} = 0 \\ 2a_j j + b_j - 2a_{j+1} j - b_{j+1} = 0 \end{cases}$

(S) est un système linéaire à 2n équations d'inconnues $a_0, b_0, c_0, \dots, a_n, b_n, c_n$.

(b) On cherche à résoudre le système (S_b) : $\forall j \in [[0, n-1]]\quad \begin{cases} P_j(j) = 0 P_{j+1}(j) = 0 \\ P'_j(j) = P'_{j+1}(j) \end{cases}$

$$(S_b) \Longleftrightarrow \begin{cases} (\Sigma_1)\ \forall i \in [[1, n-1]] \quad P_i(i) = P_i(i-1) = 0 \\ \forall i \in [[0, n-1]] \quad P'_i(i) = P'_{i+1}(i) \\ P_0(0) = 0 \\ P_n(n-1) = 0 \end{cases}.$$

Après quelques lignes de calculs,

$(\Sigma_1) \Longleftrightarrow \forall i \in [[1, n-1]]\quad \begin{cases} b_i = (1-2i))a_i \\ c_i = (i^2 - i)a_i \end{cases}$

D'autre part, pour tout $i \in [[0, n-1]]$, $\quad P'_i(i) = P'_{i+1}(i) \Longleftrightarrow 2ia_i + b_i = 2ia_{i+1} + b_{i+1}$

$$(S_b) \Longleftrightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ b_0 = b_1 \\ \forall i \in [[1, n-1]] \quad b_i = (1-2i)a_i \\ \forall i \in [[1, n-1]] \quad c_i = (i^2 - i)a_i \\ \forall i \in [[1, n-2]]\, a_i = -a_{i+1} a_n(n-1)^2 + b_n(n-1) + c_n = 0 \\ a_{n-1} = 2a_n(n-1) + b_n \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_i = (-1)^{i-1} a_1 \quad \forall i \in [[1, n-1]] \\ b_i = (1-2i)(-1)^{i-1} a_1 \quad \forall i \in [[1, n-1]] \\ c_i = (i^2 - i)(-1)^{i-1} a_1 \quad \forall i \in [[1, n-1]] \\ c_0 = 0 \\ b_0 = -a_1 \\ b_n = a_{n-1} - 2(n-1)a_n \\ c_n = -(n-1)a_{n-1} + (n-1)^2 a_n \end{cases}$$

C'est vraiment aussi affreux ou j'ai loupé quelque chose ?

(c)

(i). *élémentaire*

(ii). Une fonction H définie par $H(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$ sur tout I_i pour $0 \le i \le n$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si $(a_0, b_0, c_0, \dots, a_n, b_n, c_n)$ est solution du système (S_b) résolu en 9.b. La dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$ est celle des solutions de ce système, donc $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 3$ puisque les seules inconnues libres sont a_0, a_1 et a_n.

(iii). *Le texte précisait $n \ge 2$. On ne change rien aux calculs précédents en englobant le cas $n = 1$ .Je suppose ici que $n \ge 1$*

• Si $n = 1$, $E = E_0$ qui est de dimension 4 d'après B.5. Comme $\dim \operatorname{Ker}\varphi = 3$, le théorème du rang donne $\operatorname{rg}\varphi = 1$ et donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$: φ est surjective.

• Supposons que pour un certain $n \ge 1$, l'application φ soit surjective. On se place dans $E = E_n$, espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ polynomiales de degré inférieur à 2 sur tous les I_k pour $0 \le k \le n+1$.

Soit $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence il existe $f \in E_{n-1}$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, polynomiale de degré inférieur à 2 sur tous les I_k pour $0 \le k \le n$ telle que $\forall i \in [[0, n-1]] \quad f(i) = \beta_i$. D'après la question C.7, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction H définie par :

$H(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} x \le n-1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} x > n-1 \\ H(n) = \beta_n \end{cases}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est bien dans E_n : elle est de classe $\mathscr{C}^1$ et polynomiale de degré inférieur à 2 sur tous les I_k pour $0 \le k \le n$ donc aussi sur les I_k

pour $0 \leq k \leq n+1$. De plus elle vérifie $H(k) = \beta_k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.On a donc $\varphi(H) = (\beta_0, \ldots, \beta_n)$, ce qui prouve que φ est surjective de E_n sur $\mathbb{R}^{n+1}$.

On en déduit par récurrence sur $n \geq 1$ que φ est surjective de E_{n-1} sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(iv). On déduit du théorème du rang que $\dim(E_{n-1}) = n+3$

10.

```
def interpo(B):#B est une liste  de longueur N=50
    N=len(B)#on prendra N=50
    P=(0,0,B[0])
    #le polynôme constant de valeur B[0] convient en 0
    L=[P]
    for i in range(N-1):
        a,b,c=L[i][0], L[i][1], L[i][2] #le dernier polynôme trouvé est f: x->ax^2+bx+c et vaut beta_i en i
        u=a*i**2+b*i+c#u=f(i)
        v=2*a*i+b#v=f'(i)
        w=B[i+1]
        L.append(prolonge(u,v,w,i+1))
    return L
```

Exercice 3

A.

1. $\forall x \in]-1,1[\quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. Le Rayon de convergence est 1.

2. $Sp(M) = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} \right\}$.

Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, $\quad 0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$ et $-1 < \dfrac{-1}{2} < \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$.

M est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ admettant 2 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

3.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = MX_n$. Par récurrence facile, on montrerait que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0$.

D'autre part, comme M est diagonalisable, il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ où $D = \text{Diag}(\alpha, \beta)$

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

En effectuant les produits matriciels, on en déduit l'existence de réels A et B tels que

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = A\alpha^n + B\beta^n$.

Rque : Il est plus rapide d'utiliser les résultats connus pour une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique admet 2 racines distinctes α et β mais ce n'est pas la direction suggérée par le texte ..

(b) Pour $n = 0$, $\quad 4 = u_0 = A + B$ et pour $n = 1$, $\quad 3 = u_1 = A\alpha + B\beta$.

On a donc aussi $4\beta = A\beta + B\beta$ et $4\alpha = A\alpha + B\alpha$.

En ajoutant : $A\beta + B\alpha + \underbrace{B\beta + A\alpha}_{=3} = 4\underbrace{(\alpha+\beta)}_{=1/2}$ d'où $A\beta + B\alpha = -1$.

(c) Comme α et β sont dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$, les séries $\sum \alpha^n$ et $\sum \beta^n$ sont convergentes et par opérations sur les séries convergentes $\sum u_n$ converge.

De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{A}{1-\alpha} + \frac{B}{1-\beta}$.

En utilisant les égalités précédentes et les égalités $\alpha+\beta = \frac{1}{2}$ et $\alpha\beta = \frac{-1}{4}$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 20$.

4. *Le module fractions n'étant pas un module explicitement au programme, j'ai un peu la flemme d'introduire une nouvelle relation de récurrence sur la suite à valeurs entières $(4^n v_n)_{n\geq 0}$ je répond à la question en omettant le "sous forme de nombres rationnels"*

```
def suite(N):
    L=[4]
    if  N==0:
        return L
    else:
        L=[4,3]
        for k in range(1,N):
            u=L[−1]/2+L[−2]/4 #u_{k+1}=u_k/2+u_{k−1}/4
            L.append(u)
    return L
```

Si on appelle $C(N)$ le nombre d'opérations nécéssaires, on a $C(0) = 0$ et $C(N) = 3(N-1)$ si $N \geq 1$ puisque pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ on effectue 1 addition et 2 divisions.

B.

1. Un joueur ne peut gagner qu'à partir du 3ème tour donc

$\mathbf{P}(E_1) = 1$, $\mathbf{P}(E_2) = 1$, $\mathbf{P}(A_1) = 0$, $\mathbf{P}(A_2) = 0$, $\mathbf{P}(B_1) = 0$, $\mathbf{P}(B_2) = 0$

$\mathbf{P}(A_3 = \mathbf{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap (X_3) = 0) = p^2 q$ car les (X_i) sont indépendantes.

De même $\mathbf{P}(B_3) = qp^2$.

Comme les joueurs ne peuvent pas gagner avant le 3ème tour, $E_3 = \overline{A_3 \cup B_3}$.

On a $\mathbf{P}(E_3) = 1 - \mathbf{P}(A_3 \cup B_3) = 1 - \mathbf{P}(A_3) - \mathbf{P}(B_3)$ car A_3 et B_3 sont incompatibles d'où $\mathbf{P}(E_3) = 1 - 2p^2 q$.

2. L'évenement $E_n \cap (X_n = x_0)$ ne dépend que des variables X_i pour $1 \leq i \leq n$ et l'évenement $(X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k})$ ne dépend que des variables X_i pour $n+1 \leq i \leq n+k$.

Comme les variables $(X_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes, ces deux évenements sont indépendants.

On en déduit que

$\mathbf{P}(E_n \cap (X_n = x_0) \cap (X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k})) = \mathbf{P}(E_n \cap (X_n = x_0))\,\mathbf{P}((X_{n+1} = x_{n+1}) \cap \ldots \cap (X_{n+k} = x_{n+k}))$.

3.

(a) $v_1 = \mathbf{P}(E_1 \cap (X_1 = 0)) = \mathbf{P}(X_1 = 0) = q$, $w_1 = \mathbf{P}(E_1 \cap (X_1 = 1)) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = p$ car $\mathbf{P}(E_1) = 1$

De même $v_2 = q$ et $w_2 = p$.

(b) $E_n \cap (X_n = 0) = E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0) \bigcup E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$.

Comme il s'agit d'une union d'évenements incompatibles,

$\mathbf{P}(E_n \cap (X_n = 0)) = \mathbf{P}(E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) + \mathbf{P}(E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0))$.

Si $X_{n-1} = 0$ et $X_n = 0$ le dernier motif est PFF ou FFF et aucun des joueurs ne gagne au nième tour, donc

$\mathbf{P}(E_n \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) = \mathbf{P}(E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 0) \cap (X_n = 0)) = v_{n-1}\mathbf{P}(X_n = 0) = qv_{n-1}$ d'après 6 .

$E_n \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = (E_n \cap (X_{n-2} = 0) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)) \bigcup (E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0))$.

$E_n \cap (X_{n-2} = 1) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0) = \emptyset$ car le dernier motif est alors PPF et Alice gagne au rang n

Si $X_{n-2}=0$ et $(X_{n-1}=1$ et $(X_n=0)$, le dernier motif est FPF et aucun des joueurs ne peut gagner aux rangs n et $n-1$.
On en déduit que $E_n\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0)=E_{n-2}\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0)$
En utilisant de nouveau le résultat de 6,
$\mathbf{P}(E_n\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0))=\mathbf{P}(E_n\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0))=\mathbf{P}(E_{n-2}\cap(X_{n-2}=1)\cap(X_{n-1}=1)\cap(X_n=0))=v_{n-2}pq$
Finalement,

$$\forall n\geq 3,\quad v_n=qv_{n-1}+pqv_{n-2}$$

(c) Comme $X_n=1$, on a $k\leq n-1$.
Supposons $k\leq n-2$, on a alors $k+1\leq n$, $k+2\leq n$, $X_k=0$, $X_{k+1}=1$, $X_{k+2}=1$: Benoit gagne au rang $k+2\leq n$, c'est absurde donc $k=n-1$.

(d) D'après ce qui précède, $E_n\cap(X_n=1)=\left(\bigcap_{k=1}^n(X_k=1)\right)\bigcup(E_n\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1))$
Comme il s'agit d'une union disjointe,
$w_n=\mathbf{P}(E_n\cap(X_n=1))=\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n(X_k=1)\right)+\mathbf{P}((E_n\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)))$
Les X_i étant mutuellement indépendantes, $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^n(X_k=1)\right)=p^n$.
D'autre part $E_n\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)=E_{n-1}\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1)$ et
$\mathbf{P}(E_{n-1}\cap(X_{n-1}=0)\cap(X_n=1))=v_{n-1}p$ d'après 6.
Finalement $\forall n\geq 3,\quad w_n=p^n+pv_{n-1}$.

4.

(a)

(i) $(T>n)=E_n$.

(ii) d'après la formule des probabilités totales,
$\mathbf{P}(T>n)=\mathbf{P}(E_n)=\mathbf{P}(E_n\cap(X_n=0))+\mathbf{P}(E_n\cap(X_n=1))=v_n+w_n=v_n+p^n+pv_{n-1}$.

(iii) Les évenements $(T>n)_{n\geq 2}$ forment une suite décroissante , donc par continuité monotone décroissante, $\mathbf{P}(T=\infty)=\mathbf{P}(\bigcap_{n=2}^{+\infty}(T>n))=\lim_{n\to+\infty}\mathbf{P}(T>n)$
Comme $0<p<1$, $\quad\lim_{n\to+\infty}p^n=0$, on a donc $\mathbf{P}(T=\infty)=\lim_{n\to+\infty}v_n+pv_{n-1}$.
Soit $a_n=v_n+pv_{n-1}=\dfrac{v_{n+1}}{q}$. Cette suite est convergente de limite $\mathbf{P}(T=\infty)$, on en déduit que la suite (v_n) est convergente de limite $\ell=q\mathbf{P}(T=\infty)$.
En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par (v_n) on a $\ell=(q+pq)\ell$ soit $p^2\ell=0$ d'où $\ell=0$ car $p>0$
On en déduit que $\mathbf{P}(T=\infty)=\dfrac{\ell}{q}=0$.

(iv) Avec une probabilité égale à 1, l'un des joueurs gagne la partie.

(b) Comme $\sum v_n$ converge et que $\sum p^n$ converge car $0<p<1$, la série $\sum\mathbf{P}(T>n)$ converge.
Comme T est à valeurs positives montrer que T est d'espérance finie revient à montrer la convergence de la suite croissante (S_n) où pour $n\geq 3$, $\quad S_n=\sum_{k=3}^n k\mathbf{P}(T=k)$.

Rque : le fait que si T est d'espérance finie, alors $\sum\mathbf{P}(T\geq n)$ converge et $E(T)=\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(T\geq n)$ figure au programme PC mais pas la réciproque !

$$S_n=\sum_{k=3}^n k\left(\mathbf{P}(T>k-1)-\mathbf{P}(T>k)\right)=\sum_{k=2}^{n-1}(k+1)\mathbf{P}(T>k)-\sum_{k=3}^n k\mathbf{P}(T>k)$$

$$S_n=3\mathbf{P}(T>2)+\sum_{k=3}^{n-1}\mathbf{P}(T>k)-n\mathbf{P}(T>n)$$

On en déduit que $S_n\leq 3\mathbf{P}(T>2)+\sum_{k=3}^{n-1}\mathbf{P}(T>k)\leq 3\mathbf{P}(T>2)+\sum_{k=3}^{+\infty}\mathbf{P}(T>k)$.
La suite (S_n) est une suite croissante majorée donc convergente et T est d'espérance finie.

D'après un résultat de cours, on sait alors que $E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(T \geq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T > n) = 2 + \sum_{n=2}^{\mathbf{P}} (T > n)$ car $\mathbf{P}(T > 0) = \mathbf{P}(T > 1) = 1$.

On a donc $E(T) = 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} v_n + \sum_{n=2}^{+\infty} p^n + p\sum_{n=2}^{+\infty} v_{n-1} = 2 + pq + \frac{p^2}{1-p} + (1+p)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} v_n\right)$.

(c) Si $p = q = \frac{1}{2}$, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence de la partie A mais avec les conditions initiales $v_1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{2}$ et $v_3 = \frac{3}{8}$.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 8v_{n+2}$, la suite (u_n) est la suite étudiée dans la partie A. On en déduit que $\sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+2} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{5}{2}$.

D'où

$$E(T) = \frac{13}{2}$$

5.

(a) Si Alice gagne au nième lancer (év'nement A_n), le dernier motif est PPF. D'autre part comme $A_n \subset E_{n-1}$, on a $A_n \subset E_{n-1} \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_{n-2}) = 1)$. D'après la question 7.b, si au cours des n-1 premiers lancers, la pièce était tombée sur Face, on aurait $X_{n-2} = 0$. On a donc $A_n \subset (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$

(b) On en déduit par double inclusion que $A_n = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \ldots (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$ puis $\mathbf{P}(A_n) = p^{n-1}q$.

$B_n = (E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 0)) \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 1)$.

Donc $\mathbf{P}(B_n) = p^2\mathbf{P}(E_{n-2} \cap (X_{n-2} = 0)) = p^2 v_{n-2}$

6. Notons $A = \bigcup_{n=3}^{+\infty} A_n$, l'événement "Alice gagne" et $B = \bigcup_{n=3}^{+\infty} B_n$, l'évenement "Benoit gagne".

Comme $\mathbf{P}(T = \infty) = 0$ (8.a), $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 1$.

D'autre part, les évenements (A_n) étant 2 à 2 incompatibles, $\mathbf{P}(A) = \sum_{n=3}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} p^{n-1}q = p^2$.

On en déduit $\mathbf{P}(B) = 1 - p^2$

Si la pièce est équilibrée, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(B) = \frac{3}{4}$. (Paradoxe de Penney).

7. Le jeu est équitable si $p^2 = 1 - p^2$, soit $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$.