

CONCOURS COMMUN MINES-PONTS 2023

Épreuve de mathématiques I
(corrigé)

Partie 1 : Questions préliminaires

1. Démontrons le sens direct. Supposons S dans $S_n^+(\mathbf{R})$. Pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ on a donc : $\langle SX, X \rangle \geq 0$. C'est en particulier le cas pour un vecteur propre X associé à une valeur propre λ de S . Or, pour un tel vecteur : $\langle SX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle = \lambda \langle X, X \rangle$, et : $\langle X, X \rangle > 0$ (en effet X est non nul en tant que vecteur propre), donc :

$$\lambda = \frac{\langle SX, X \rangle}{\langle X, X \rangle} \geq 0.$$

On a donc bien, si S est dans $S_n^+(\mathbf{R})$: $\forall \lambda \in \text{Sp}(S)$, $\lambda \geq 0$. D'où : $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}_+$, ce qui montre le sens direct.

Démontrons le sens réciproque. Supposons : $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}_+$. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$. Comme S est symétrique réelle, d'après le théorème spectral il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ et D diagonale telles que : $S = PDP^{-1} = PDP^\top$. Si l'on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D , et si l'on pose :

$$P^{-1}X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} \langle SX, X \rangle &= X^\top SX = X^\top PDP^{-1}X \\ &= (P^\top X)^\top D(P^{-1}X) \\ &= (P^{-1}X)^\top D(P^{-1}X) \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2. \end{aligned}$$

Or par hypothèse : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i \geq 0$, et des réels au carré sont positifs, donc :

$$\langle SX, X \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i^2 \geq 0.$$

D'où le résultat : $S \in S_n^+(\mathbf{R})$, ce qui montre le sens réciproque. On a donc bien démontré que $S \in S_n^+(\mathbf{R})$ si et seulement si son spectre est inclus dans $\mathbf{R}_+$.

2. Soit $t \in [0, 1]$, et soit $(A, B) \in (S_n^+(\mathbf{R}))^2$. On veut montrer : $tA + (1-t)B \in S_n^+(\mathbf{R})$. Or, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$, on a par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle = t\langle AX, X \rangle + (1-t)\langle BX, X \rangle.$$

Comme $t \in [0, 1]$, on a aussi $1-t \in [0, 1]$. De plus A et B sont dans $S_n^+(\mathbf{R})$, donc : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$, $\langle AX, X \rangle \geq 0$, $\langle BX, X \rangle \geq 0$. Donc l'égalité ci-dessus implique :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle \geq 0,$$

c'est-à-dire : $tA + (1-t)B \in S_n^+(\mathbf{R})$. Ceci vaut pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $(A, B) \in (S_n^+(\mathbf{R}))^2$, donc $S_n^+(\mathbf{R})$ est convexe.

Pour $S_n^{++}(\mathbf{R})$, on peut reprendre une partie des calculs ci-dessus. Supposons cette fois-ci : $(A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2$. Le calcul ci-dessus montre déjà que $\langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle$ est positif pour tout vecteur colonne X , et on veut démontrer que c'est strictement positif pour tout vecteur colonne X non nul. Par contraposée, cela revient à démontrer que si $\langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle = 0$, alors $X = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$. Faisons. Supposons : $\langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle = 0$. D'après le calcul et le raisonnement précédents, on a donc :

$$\underbrace{t\langle AX, X \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{(1-t)\langle BX, X \rangle}_{\geq 0} = 0.$$

Une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, donc on a : $t\langle AX, X \rangle = 0$, et : $(1-t)\langle BX, X \rangle = 0$. Or soit $t \neq 0$, soit $1-t \neq 0$; supposons par exemple que $t \neq 0$; alors la première égalité ci-avant implique : $\langle AX, X \rangle = 0$, et comme $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ ce n'est possible que si $X = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$, ce qu'il fallait démontrer. De même si $1-t \neq 0$, en passant cette fois-ci par l'annulation de $\langle BX, X \rangle = 0$ et l'appartenance de B à $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Ainsi : $\langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle = 0$ implique : $X = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$. Par contraposée :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}, \quad \langle (tA + (1-t)B)X, X \rangle > 0,$$

ce qui montre : $tA + (1-t)B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. Ceci vaut pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $(A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2$, donc $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est convexe.

En revanche $S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$ parce qu'ils ne sont pas stables par multiplication externe : ainsi la matrice I_n appartient à ces deux ensembles puisque : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}, \langle I_n X, X \rangle = (\|X\|_2)^2 > 0$, mais $-I_n$ n'y appartient pas puisque, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\} : \langle -I_n X, X \rangle = -\langle I_n X, X \rangle < 0$. D'où le résultat.

3. Comme A est symétrique réelle, il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix}$ telles que : $A = PDP^{-1}$, d'après le théorème spectral. Comme A est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, on sait que l'on a, d'après la question 1 : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i > 0$. On peut donc poser :

$$S = P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On a bien : $S^2 = P \begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda_1})^2 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (\sqrt{\lambda_n})^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = A$. Il reste à vérifier

que S est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Calculons $S^\top$. Pour abréger, nous notons $D' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ dans

ce qui suit (il suffit de se souvenir que c'est une matrice diagonale, de sorte que : $D'^\top = D'$). On sait que l'on a : $P^{-1} = P^\top$, donc :

$$S^\top = (PD'P^{-1})^\top = (P^{-1})^\top D'^\top P^\top = (P^\top)^\top D'P^{-1} = PD'P^{-1} = S,$$

donc S est symétrique. De plus ses valeurs propres sont clairement les $\sqrt{\lambda_i}$ (puisque S est semblable à la matrice diagonale D' dont les valeurs propres sont les coefficients diagonaux, c'est-à-dire les $\sqrt{\lambda_i}$), qui sont strictement positifs. Ainsi : $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}_+^*$, donc $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ d'après la question 1 : d'où le résultat.

4. Nous allons démontrer que pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, la proposition :

P_p : « Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i). »$$

est vraie, par récurrence sur p (comme suggéré par l'énoncé; mais nous proposons une autre démonstration plus bas).

Pour $p = 1$, cela revient à prendre $\lambda_1 = 1$ et $x_1 \in I$. On a alors trivialement : $f(x_1) \leq f(x_1)$, ce qui démontre P_1 . D'où l'initialisation.

Démontrons l'hérédité. Soit $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. On suppose P_p . Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{p+1}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1, \text{ et soit } (x_1, \dots, x_{p+1}) \in I^{p+1}. \text{ Posons : } t = \sum_{i=1}^p \lambda_i \in [0, 1] \text{ (le fait que } t \text{ soit inférieur à 1}$$

découle de l'inégalité $t \leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$). Si $t = 0$, alors on est dans le cas où : $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, et : $\lambda_{p+1} = 1$, et on montre alors l'inégalité désirée trivialement, comme dans l'initialisation. Si $t \neq 0$, alors, en remarquant que $\lambda_{p+1} = 1 - t$, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left(t \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t} x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1}\right) \\ &= f\left(t \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t} x_i + (1-t)x_{p+1}\right) \\ &\leq t f\left(\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t} x_i\right) + (1-t)f(x_{p+1}) && (f \text{ convexe, } t \in [0, 1]) \\ &\leq t \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t} f(x_i) + (1-t)f(x_{p+1}) && \left(P_p, \text{ car : } \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{t} = \frac{t}{t} = 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) && (\lambda_{p+1} = 1-t) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i), \end{aligned}$$

d'où P_{p+1} : ainsi P_p implique P_{p+1} , ce qui clôt l'hérédité.

Par principe de récurrence on a donc bien le résultat : pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que : $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, et tout $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, on a : $f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$.

Autre démonstration. On pouvait démontrer l'inégalité demandée sans passer par une récurrence, mais en utilisant un résultat admis par l'énoncé. Montrons d'abord que l'épigraphe de la fonction f , c'est-à-dire :

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in I \times \mathbf{R} \mid f(x) \leq y\}$$

est une partie convexe de $\mathbf{R}^2$. Soient $t \in [0, 1]$, et $(x, y), (x', y')$ dans $\mathcal{E}$. Montrons : $t(x, y) + (1-t)(x', y') \in \mathcal{E}$. Comme : $t(x, y) + (1-t)(x', y') = (tx + (1-t)x', ty + (1-t)y')$, cela revient à démontrer :

$$f(tx + (1-t)x') \leq ty + (1-t)y'.$$

Or f est convexe, donc : $f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$, et $f(x) \leq y, f(x') \leq y'$, par hypothèse sur (x, y) et (x', y') . Donc finalement :

$$f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x') \leq ty + (1-t)y',$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathbf{R}^2$, donc d'après un résultat admis par l'énoncé : pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, pour tout $((x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)) \in \mathcal{E}^p$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que : $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, on a : $\sum_{i=1}^p \lambda_i (x_i, y_i) \in \mathcal{E}$. Si on l'applique en particulier aux points $(x_1, f(x_1)), \dots, (x_p, f(x_p))$ qui sont trivialement dans $\mathcal{E}$, on a : $\sum_{i=1}^p \lambda_i (x_i, f(x_i)) = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i) \right) \in \mathcal{E}$. On obtient le résultat voulu en traduisant ce que signifie cette appartenance à $\mathcal{E}$:

$$f \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

C'est exactement le résultat demandé.

Remarque culturelle. On a démontré *l'inégalité de Jensen*.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

5. Notons $\mu_1, \dots, \mu_n$ les valeurs propres de M , comptées autant de fois que leurs ordres de multiplicité. Elles sont toutes réelles puisque M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ par le théorème spectral. On sait par ailleurs que l'on a : $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \mu_i$, et : $\det(M) = \prod_{i=1}^n \mu_i$. Ainsi l'inégalité à démontrer équivaut

à : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^{\frac{1}{n}}$. Si l'un des μ_i est nul, alors l'inégalité est triviale puisque le membre de droite est nul et le membre de gauche positif ou nul (en tant que somme de réels positifs). Il suffit donc de traiter le cas où toutes les valeurs propres sont strictement positives : c'est ce que nous supposons à présent.

Suivons alors l'indication de l'énoncé : l'application $x \mapsto -\ln(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée : $x \mapsto \frac{1}{x^2} \geq 0$, donc $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$. On peut alors lui appliquer l'inégalité de la question 4, où l'on pose : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_i = \frac{1}{n} \in \mathbf{R}_+$, $x_i = \mu_i \in \mathbf{R}_+^*$. On a bien : $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{n} \times n = 1$, donc les conditions de la question 4 sont bien remplies et on en déduit :

$$-\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \mu_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot (-\ln(\mu_i)).$$

Ou encore :

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(\mu_i) = \ln \left(\left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^{\frac{1}{n}} \right).$$

En prenant l'image de chaque membre de l'inégalité par l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbf{R}$, on obtient :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^{\frac{1}{n}},$$

c'est-à-dire : $\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geq (\det(M))^{\frac{1}{n}}$, ce qu'il fallait démontrer.

6. On rappelle que l'on a : $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^\top M)}$. Or M est symétrique, donc : $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^2)}$. Pour exprimer cette trace en fonction des valeurs propres de M , diagonalisons M (ce qui est possible grâce au théorème spectral). Soient $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $D \in M_n(\mathbf{R})$ diagonale telles que : $M = PDP^{-1}$, et notons $\mu_1, \dots, \mu_n$ les coefficients diagonaux de D , qui sont par ailleurs les valeurs propres de M (comptées avec multiplicités). Alors : $M^2 = PD^2P^{-1}$, donc M^2 est semblable à D^2

et on en déduit que ces deux matrices ont même trace. Or les coefficients diagonaux de D^2 sont $\mu_1^2, \dots, \mu_n^2$. On en déduit : $\text{Tr}(M^2) = \text{Tr}(D^2) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2$, et donc :

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2}.$$

7. On reprend les notations de la résolution de la question 5, et on applique l'inégalité admise dans l'énoncé, avec $x_i = \mu_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On obtient, toujours d'après la résolution de la question 5 :

$$2 \max(\mu_1, \dots, \mu_n) \left(\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\mu_k - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right)^2.$$

Simplifions le membre de droite. Remarquons que, si l'on note $P \in \text{O}_n(\mathbf{R})$ une matrice telle que :

$$M = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{I}_n &= P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} - P (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{I}_n P^{-1} \\ &= P \left(\begin{pmatrix} \mu_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\det(M))^{\frac{1}{n}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (\det(M))^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} \right) P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \mu_1 - (\det(M))^{\frac{1}{n}} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mu_n - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{I}_n$ admet pour valeurs propres les $\mu_i - (\det(M))^{\frac{1}{n}}$ (avec les mêmes multiplicités que les μ_i). Donc, d'après la question précédente :

$$\|M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{I}_n\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\mu_k - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right)^2}.$$

Ainsi :

$$2 \max(\mu_1, \dots, \mu_n) \left(\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \|M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{I}_n\|_2^2,$$

et il reste à majorer $\max(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Pour cela : soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que : $\mu_{i_0} = \max(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Comme $M \in \text{S}_n^+(\mathbf{R})$, tous les μ_i sont positifs par la question 1, et on en déduit :

$$\max(\mu_1, \dots, \mu_n) = \mu_{i_0} = \sqrt{\mu_{i_0}^2} \leq \sqrt{\mu_{i_0}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \mu_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mu_i^2} = \|M\|_2,$$

d'où :

$$2\|M\|_2 \left(\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \|M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \text{I}_n\|_2^2,$$

et on en déduit l'inégalité voulue après division par $2\|M\|_2 > 0$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que M est non nulle).

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8. Rappelons que d'après la question 3, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que : $A = S^2$. La matrice S est inversible puisque toutes ses valeurs propres sont non nulles d'après la question 1, et la matrice $S^{-1}BS^{-1}$ est symétrique réelle (vérification facile). Par le théorème spectral, elle est diagonalisable : soient donc $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $D \in M_n(\mathbf{R})$ diagonale telles que : $S^{-1}BS^{-1} = PDP^{-1} = PDP^\top$. On a alors :

$$B = SPDP^\top S = SPDP^\top S^\top = SPD(SP)^\top.$$

Posons donc : $Q = SP$. C'est un produit de matrices inversibles, donc Q est inversible, et le calcul ci-dessus montre que l'on a : $B = QDQ^\top$, avec D diagonale. De plus :

$$QQ^\top = SP(SP)^\top = SPP^\top S^\top = SS^\top = S^2 = A,$$

donc : $A = QQ^\top$. D'où le résultat : il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$.

Justifions que si l'on suppose de plus que $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs. Pour cela, on va montrer que D est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$. C'est bien sûr une matrice symétrique comme toute matrice diagonale, et pour tout vecteur colonne X non nul on a :

$$\begin{aligned} \langle DX, X \rangle &= (DX)^\top X = X^\top D^\top X = X^\top \left(Q^{-1} B (Q^\top)^{-1} \right) X = \left((Q^\top)^{-1} X \right)^\top B (Q^\top)^{-1} X \\ &= \left\langle (Q^\top)^{-1} X, B (Q^\top)^{-1} X \right\rangle. \end{aligned}$$

Or pour tout vecteur X non nul, on a : $(Q^\top)^{-1} X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$ (dans le cas contraire, multiplier par $Q^\top$ cette égalité donnerait : $X = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$, ce qui est absurde), et comme B est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ cela implique, par définition :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}, \quad \left\langle (Q^\top)^{-1} X, B (Q^\top)^{-1} X \right\rangle > 0,$$

et donc, d'après les calculs ci-dessus : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}, \langle DX, X \rangle > 0$. Ceci montre que D est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$. Donc, par la question 1, ses valeurs propres sont strictement positives, or ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : on a donc démontré que si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.

Remarque. On ne prétend pas que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de B . Attention, c'est faux *a priori*.

Remarque culturelle. On a démontré le théorème de réduction simultanée.

9. L'application $t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, par composition de l'application $t \mapsto 1 + e^t$, dérivable sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $]1, +\infty[$, et du logarithme qui est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc en particulier sur $]1, +\infty[$. Sa dérivée est :

$$t \mapsto \frac{e^t}{1 + e^t} = 1 - \frac{1}{1 + e^t},$$

qui est croissante sur $\mathbf{R}$ parce que $t \mapsto 1 + e^t$ est évidemment croissante : le passage à l'inverse et la multiplication par -1 renversent deux fois la monotonie et donnent donc une fonction toujours croissante. On en déduit que $t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est convexe sur $\mathbf{R}$, ce qui répond à la question posée.

10. Soit $(A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2$. Par la question 8, il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$, et de plus les coefficients diagonaux de D (que nous notons $\mu_1, \dots, \mu_n$ dans ce qui suit) sont strictement positifs. On a alors :

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= \det(QQ^\top + QDQ^\top) = \det(Q(I_n + D)Q^\top) = \det(Q) \det(I_n + D) \det(Q^\top) \\ &= (\det(Q))^2 \det(I_n + D), \end{aligned}$$

et par un calcul analogue :

$$\det(A) = (\det(Q))^2, \quad \det(B) = (\det(Q))^2 \det(D),$$

donc l'inégalité à démontrer : $(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$, équivaut à :

$$(\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}} \geq 1 + (\det(D))^{\frac{1}{n}}$$

après division par $(\det(Q))^2 > 0$ (rappelons que Q est inversible).

Comme D et $I_n + D$ sont diagonales, leurs déterminants s'obtiennent comme produits de leurs coefficients diagonaux. Ainsi cette inégalité équivaut également à :

$$\left(\prod_{i=1}^n (1 + \mu_i) \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

C'est sous cette forme équivalente que nous allons démontrer cette inégalité. On utilise le résultat de la question précédente : comme $t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est convexe, par la question 4 on a, en posant : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = \frac{1}{n} \in \mathbf{R}_+, x_i = \ln(\mu_i)$ (rappelons que les μ_i sont strictement positifs, donc $\ln(\mu_i)$ est bien défini pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$) :

$$\ln \left(1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\mu_i)} \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + e^{\ln(\mu_i)}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + \mu_i) = \ln \left(\prod_{i=1}^n (1 + \mu_i)^{\frac{1}{n}} \right).$$

En prenant l'image de chaque membre de l'inégalité par l'exponentielle, qui est croissante sur $\mathbf{R}$, on obtient :

$$1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\mu_i)} \leq \prod_{i=1}^n (1 + \mu_i)^{\frac{1}{n}},$$

et comme : $e^{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\mu_i)} = \prod_{i=1}^n \mu_i^{\frac{1}{n}}$, cela donne bien l'inégalité annoncée ci-dessus. Par équivalence, on a bien démontré :

$$(\det(A+B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}},$$

d'où le résultat.

11. Soit $(A, B) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2$. On reprend les notations et la stratégie de la question précédente, pour démontrer que l'inégalité demandée : $\forall t \in [0, 1], \det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t} (\det(B))^t$, équivaut à :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \prod_{i=1}^n ((1-t) + t\mu_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \mu_i \right)^t.$$

Le lecteur vérifiera les détails, notamment pour la simplification de $(\det(Q))^2$. En prenant l'image de chaque membre de l'inégalité par le logarithme, ce qui est possible puisque tout est strictement positif, on note que cette inégalité équivaut à :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_{i=1}^n \ln((1-t) + t\mu_i) \geq t \sum_{i=1}^n \ln(\mu_i).$$

Pour cela, il suffit d'utiliser le fait déjà démontré que $x \mapsto -\ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$. Cela implique :

$$\forall t \in [0, 1], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad -\ln((1-t) \cdot 1 + t\mu_i) \leq (1-t) \cdot (-\ln(1)) + t \cdot (-\ln(\mu_i)),$$

soit donc :

$$\forall t \in [0, 1], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \ln((1-t) \cdot 1 + t\mu_i) \geq t \ln(\mu_i),$$

et donc, en sommant cette inégalité de 1 à n : $\forall t \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \ln((1-t) + t\mu_i) \geq t \sum_{i=1}^n \ln(\mu_i)$. On a démontré l'inégalité ci-dessus, et par équivalence cela donne : $\forall t \in [0, 1], \det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t$. D'où le résultat.

Supposons à présent que A et B sont dans $S_n^+(\mathbf{R})$. On veut montrer que l'inégalité ci-dessus reste valable. On va se ramener au cas précédent. Pour cela, on pose : $\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, A_p = A + \frac{1}{p}I_n, B_p = B + \frac{1}{p}I_n$. Pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, la matrice A_p est symétrique réelle en tant que somme de matrices symétriques réelles, et de plus :

$$\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}, \quad \langle A_p X, X \rangle = \underbrace{\langle AX, X \rangle}_{\geq 0} + \frac{1}{p} \underbrace{\langle X, X \rangle}_{> 0} > 0,$$

donc : $\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, A_p \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, et de même : $\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, B_p \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. On peut donc appliquer ce qui précède à $(A_p, B_p) \in (S_n^{++}(\mathbf{R}))^2$. Cela donne :

$$\forall p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \forall t \in [0, 1], \quad \det((1-t)A_p + tB_p) \geq (\det(A_p))^{1-t}(\det(B_p))^t.$$

Prenons la limite dans cette inégalité quand $p \rightarrow +\infty$. On a facilement : $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_p = A, \lim_{p \rightarrow +\infty} B_p = B$, et : $\forall t \in [0, 1], \lim_{p \rightarrow +\infty} ((1-t)A_p + tB_p) = (1-t)A + tB$ (prendre la limite coefficient par coefficient). Or le déterminant est continu en tant qu'application multilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie. Donc :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \det(A_p) = \det(A), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \det(B_p) = \det(B), \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \det((1-t)A_p + tB_p) = \det((1-t)A + tB).$$

Par conséquent, prendre la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus donne bien : $\forall t \in [0, 1], \det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t$. Ainsi l'inégalité reste vraie y compris si A et B sont dans $S_n^+(\mathbf{R})$.

12. En prenant le logarithme dans l'inégalité de la question précédente (ce qui est licite, puisque le déterminant des matrices de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est strictement positif : c'est le produit de leurs valeurs propres avec multiplicités, et elles sont strictement positives par la question 1), on obtient :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \ln \circ \det(\det((1-t)A + tB)) \geq (1-t) \ln \circ \det(A) + t \ln \circ \det(B),$$

ce qui signifie que $\ln \circ \det$ est une fonction concave sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Partie 4 : Encore de la convexité !

13. Soit $t \in \mathbf{R}$. Comme A est symétrique réelle, il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbf{R})$

telles que : $A = PDP^{-1}$, d'après le théorème spectral. Alors :

$$I_n + tA = PI_nP^{-1} + tPDP^{-1} = P(I_n + tD)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 + t\lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 + t\lambda_n \end{pmatrix} P^{-1},$$

donc :

$$g(t) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i).$$

C'est une application polynomiale, donc g est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$.

14. Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Avec les notations de la question précédente, on veut montrer :

$$\ln \left(\prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i) \right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i t,$$

ou encore :

$$\sum_{i=1}^n \ln(1 + t\lambda_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i t.$$

Or on sait que l'on a :

$$\forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x.$$

Comme les λ_i sont (strictement) positifs d'après la question 1, et $t \in \mathbf{R}_+$ on peut poser : $x = \lambda_i t \in \mathbf{R}_+$, et on a : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \ln(1 + t\lambda_i) \leq \lambda_i t$. En sommant cette inégalité de 1 à n , on obtient l'inégalité ci-dessus, qui équivaut à : $\ln(\det(I_n + tA)) \leq \text{Tr}(A)t$, d'où le résultat.

Partie 5 : Et pour finir... de la convexité !

15. Par la question 8, il existe une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ telles que $M = QDQ^\top$ et $A = QQ^\top$. Alors, en imitant un raisonnement déjà effectué dans les questions 10 et 11, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_A(t) = \det(Q(I_n + tD)Q^\top) = (\det(Q))^2 \det(I_n + tD).$$

En reprenant le raisonnement de la question 13 (il suffit de remplacer A par D), on sait que $t \mapsto \det(I_n + tD)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Par conséquent f_A est aussi de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, d'où le résultat.

16. Tout d'abord, $A + tM$ est bien sûr symétrique en tant que somme de matrices symétriques. Reprenons les notations de la question précédente. On a : $\forall t \in \mathbf{R}, A + tM = Q(I_n + tD)Q^\top$. En imitant un raisonnement déjà effectué dans la question 8, nous allons montrer d'abord que $I_n + tD$ est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ pour tout t dans un voisinage convenable de 0, pour en déduire qu'il en est de même pour $A + tM$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D . On a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad I_n + tD = \begin{pmatrix} 1 + t\lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 + t\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Choisissons t de sorte que $1 + t\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Cela équivaut à choisir t de sorte que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on ait : $t > -\frac{1}{\lambda_i} = -\frac{1}{|\lambda_i|}$ si $\lambda_i > 0$, et $t < -\frac{1}{\lambda_i} = \frac{1}{|\lambda_i|}$ si $\lambda_i < 0$ (si $\lambda_i = 0$ alors $1 + t\lambda_i = 1 > 0$ sans condition sur t). Posons pour cela :

$$\varepsilon_0 = \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ \lambda_i \neq 0}} \left(\frac{1}{|\lambda_i|} \right) > 0,$$

et soit $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. On a alors bien, d'après l'analyse qui précède : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 1 + t\lambda_i > 0$. Par conséquent $I_n + tD$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux (qui sont ses valeurs propres) sont strictement positifs, donc par la question 1 on a : $I_n + tD \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}, \quad \langle (A + tM)X, X \rangle &= X^\top (A + tM)X \\ &= X^\top Q(I_n + tD)Q^\top X \\ &= (Q^\top X)^\top (I_n + tD)Q^\top X \\ &= \langle Q^\top X, (I_n + tD)Q^\top X \rangle > 0 \end{aligned}$$

car $I_n + tD \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $Q^\top X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$ si $X \neq 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$ (en effet, si $Q^\top X = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$ alors, en multipliant par $(Q^\top)^{-1}$ cette égalité, on aurait $X = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}$ ce qui est absurde). On a donc bien montré : $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, et ceci est vrai pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ où $\varepsilon_0 > 0$ fut défini plus haut. D'où le résultat.

17. Soit t au voisinage de 0. Conformément à l'indication de l'énoncé, traitons d'abord le cas où $A = I_n$. On a : $f_{I_n}(t) = \det(I_n + tM)$. Par conséquent, si t est *non nul*, on peut exprimer $f_{I_n}(t)$ en fonction du polynôme caractéristique de M (noté χ_M ci-dessous), dont on connaît le coefficient en facteur de t^{n-1} :

$$\begin{aligned} f_{I_n}(t) &= \det \left((-t) \left(-\frac{1}{t} I_n - M \right) \right) \\ &= (-t)^n \chi_M \left(-\frac{1}{t} \right) \\ &= (-t)^n \left(\left(-\frac{1}{t} \right)^n - \text{Tr}(M) \left(-\frac{1}{t} \right)^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M) \right) \\ &= 1 + \text{Tr}(M)t + \cdots + (-1)^n \det(M)(-t)^n \\ &= 1 + \text{Tr}(M)t + o_{t \rightarrow 0}(t), \end{aligned}$$

puisque tous les termes au-delà de $\text{Tr}(M)$ sont polynomiaux en t et de degré supérieur ou égal à 2. L'égalité est bien sûr valable aussi si $t = 0$, puisque : $f_{I_n}(0) = \det(I_n) = 1$. Notons que ce raisonnement n'utilise aucunement le fait que M soit symétrique, et vaudrait donc pour M quelconque.

On en déduit, si A est désormais une matrice quelconque de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ (et donc en particulier une matrice inversible, puisque ses valeurs propres sont non nulles par la question 1) :

$$f_A(t) = \det \left(A \left(I_n + tA^{-1}M \right) \right) = \det(A) \det \left(I_n + tA^{-1}M \right),$$

et par le raisonnement ci-dessus, appliqué à $A^{-1}M$ au lieu de M :

$$f_A(t) = \det(A) \left(1 + \text{Tr} \left(A^{-1}M \right) t + o_{t \rightarrow 0}(t) \right) = \det(A) + \det(A) \text{Tr} \left(A^{-1}M \right) t + o_{t \rightarrow 0}(t),$$

d'où le résultat.

Autre démonstration. On pouvait aussi exprimer f_{I_n} en fonction des valeurs propres λ_i de M , et remarquer que l'on a : $f_{I_n}(t) = \prod_{i=1}^n (1 + t\lambda_i)$, et après dérivation : $f'_{I_n}(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (1 + t\lambda_i)$. On

en déduit : $f_{I_n}(0) = 1$, et : $f'_{I_n}(0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \text{Tr}(M)$, et par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 on en déduit : $f_{I_n}(t) = f_{I_n}(0) + f'_{I_n}(0)t + o_{t \rightarrow 0}(t) = 1 + \text{Tr}(M)t + o_{t \rightarrow 0}(t)$. Le désavantage de cette approche est qu'elle nécessite que M soit diagonalisable : on ne pouvait donc pas l'appliquer à $A^{-1}M$ ensuite, *a priori* du moins (voir la question 22 pour une piste permettant de démontrer qu'en fait, $A^{-1}M$ est diagonalisable). Mais il était tout de même possible de s'en tirer par cette méthode grâce au résultat de la question 8, suivant une stratégie déjà illustrée en de nombreux endroits de ce corrigé.

18. Soit $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et soit h au voisinage de 0. On a :

$$f_A(t+h) = \det(A + (t+h)M) = \det((A + tM) + hM),$$

et comme $A + tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, on peut appliquer la question précédente (à la matrice $A + tM$ au lieu de A) pour écrire :

$$\det((A + tM) + hM) = \det(A + tM) + \det(A + tM) \text{Tr} \left((A + tM)^{-1}M \right) h + o_{h \rightarrow 0}(h).$$

On en déduit :

$$\frac{f_A(t+h) - f_A(t)}{h} = \det(A+tM) \operatorname{Tr} \left((A+tM)^{-1} M \right) + o_{h \rightarrow 0}(1),$$

et donc :

$$f'_A(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_A(t+h) - f_A(t)}{h} = \det(A+tM) \operatorname{Tr} \left((A+tM)^{-1} M \right),$$

d'où le résultat.

19. Soit $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. En dérivant le produit $\Phi(t) \times (A+tM) = I_n$ par bilinéarité du produit matriciel $(A_1, A_2) \mapsto A_1 A_2$, on a :

$$\Phi'(t)(A+tM) + \Phi(t)M = 0_{M_n(\mathbf{R})}.$$

En multipliant à droite chaque membre de l'égalité par $(A+tM)^{-1}$, on en déduit :

$$\Phi'(t) = -\Phi(t)M(A+tM)^{-1}.$$

Pour $t = 0 \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, cela donne :

$$\Phi'(0) = -\Phi(0)MA^{-1} = -A^{-1}MA^{-1}.$$

Par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 on en déduit :

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \Phi'(0)t + o_{t \rightarrow 0}(t) = A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o_{t \rightarrow 0}(t).$$

20. Soit $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. On a : $\varphi_\alpha = \frac{1}{\alpha} f_A^{-\alpha}$. Or f_A est de classe C^1 sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ (car $A+tM \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, si bien que le déterminant de cette matrice est strictement positif en tant que produit des valeurs propres de $A+tM$, qui sont strictement positives par la question 1), et $x \mapsto x^{-\alpha}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$. Par composition, φ_α est de classe C^1 sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, et on a : $\varphi'_\alpha = -f_A^{-\alpha-1} f'_A$. C'est-à-dire, d'après la question 18 :

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(t) &= -(\det(A+tM))^{-\alpha-1} \det(A+tM) \operatorname{Tr} \left((A+tM)^{-1} M \right) \\ &= -\operatorname{Tr} \left((A+tM)^{-1} M \right) (\det(A+tM))^{-\alpha}, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

21. On a, d'après la question précédente : $\varphi'_\alpha = -\operatorname{Tr}(\Phi \cdot M) f_A^{-\alpha}$. Or on a déjà justifié ci-dessus que $f_A^{-\alpha}$ est dérivable sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, et Φ l'est aussi comme nous demandons de l'admettre l'énoncé. Comme $B \mapsto \operatorname{Tr}(BM)$ est linéaire, on en déduit que $\operatorname{Tr}(\Phi \cdot M)$ est aussi dérivable sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Par produit de fonctions dérivables, φ'_α est dérivable en sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ et donc plus particulièrement en 0. Ceci montre que φ_α est deux fois dérivable en 0. On a de plus :

$$\begin{aligned} \varphi''_\alpha &= -(\operatorname{Tr}(\Phi \cdot M))' f_A^{-\alpha} - \operatorname{Tr}(\Phi \cdot M) (f_A^{-\alpha})' \\ &= -\operatorname{Tr}(\Phi' \cdot M) f_A^{-\alpha} + \alpha \operatorname{Tr}(\Phi \cdot M) f_A^{-\alpha-1} f'_A, \end{aligned}$$

donc d'après la question 19 :

$$\begin{aligned} \varphi''_\alpha(0) &= -\operatorname{Tr}(\Phi'(0) \cdot M) (f_A(0))^{-\alpha} + \alpha \operatorname{Tr}(\Phi(0) \cdot M) (f_A(0))^{-\alpha-1} f'_A(0) \\ &= \operatorname{Tr} \left(A^{-1} M A^{-1} M \right) (\det(A))^{-\alpha} + \alpha \operatorname{Tr} \left(A^{-1} M \right) (\det(A))^{-\alpha-1} \det(A) \operatorname{Tr} \left(A^{-1} M \right) \\ &= (\det(A))^{-\alpha} \left(\operatorname{Tr} \left((A^{-1} M)^2 \right) + \alpha \left(\operatorname{Tr}(A^{-1} M) \right)^2 \right), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

22. Comme $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, d'après la question 3 il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que : $S^2 = A$. On a déjà justifié que S est inversible, au début de la question 8 par exemple. Alors :

$$A^{-1}M = S^{-1}S^{-1}M = S^{-1}(S^{-1}MS^{-1})S,$$

ce qui démontre que $A^{-1}M$ est semblable à $S^{-1}MS^{-1}$. Montrons que cette matrice est symétrique (le fait qu'elle soit réelle est triviale). Comme S est symétrique, S^{-1} l'est aussi (en vertu de : $(S^{-1})^\top = (S^\top)^{-1} = S^{-1}$), et on a donc :

$$(S^{-1}MS^{-1})^\top = (S^{-1})^\top M^\top (S^{-1})^\top = S^{-1}MS^{-1},$$

donc $A^{-1}M$ est bien semblable à la matrice symétrique réelle $S^{-1}MS^{-1}$. D'où le résultat.

23. On rappelle que : $\varphi''_\alpha(0) = (\det(A))^{-\alpha} \left(\text{Tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) + \alpha (\text{Tr}(A^{-1}M))^2 \right)$. Or A est dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, donc son déterminant est strictement positif d'après un argument sur les valeurs propres maintes fois invoqué (par exemple dans la question 10), donc : $(\det(A))^{-\alpha} > 0$. Il reste donc à examiner le signe de $\text{Tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) + \alpha (\text{Tr}(A^{-1}M))^2$. Pour cela : soit N une matrice symétrique réelle à laquelle $A^{-1}M$ est semblable (N existe d'après la question précédente). Alors $(A^{-1}M)^2$ est semblable à N^2 et ont donc même trace. Ainsi :

$$\text{Tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) + \alpha (\text{Tr}(A^{-1}M))^2 = \text{Tr} (N^2) + \alpha (\text{Tr}(N))^2 > \text{Tr} (N^2) - \frac{1}{n} (\text{Tr}(N))^2,$$

puisque par hypothèse on a : $\alpha > -\frac{1}{n}$. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit scalaire $(A_1, A_2) \mapsto \text{Tr}(A_1^\top A_2)$, avec les vecteurs I_n et N , on a :

$$(\text{Tr}(N))^2 = (\text{Tr}(I_n^\top N))^2 \leq \text{Tr}(I_n^\top I_n) \text{Tr}(N^\top N) = n \text{Tr}(N^2),$$

donc :

$$\text{Tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) + \alpha (\text{Tr}(A^{-1}M))^2 > \frac{1}{n} (n \text{Tr}(N^2) - (\text{Tr}(N))^2) \geq 0.$$

En conclusion :

$$\varphi''_\alpha(0) = \underbrace{(\det(A))^{-\alpha}}_{>0} \underbrace{\left(\text{Tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) + \alpha (\text{Tr}(A^{-1}M))^2 \right)}_{>0} > 0,$$

d'où le résultat.

24. En reprenant le raisonnement des questions 20 et 21, on montre que φ'_α est en fait de classe C^1 sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, et donc en particulier φ''_α est continue sur $] -\varepsilon_0, \varepsilon_0[$. Par conséquent, si $\varphi''_\alpha(0) > 0$, alors par continuité de φ''_α en 0 il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\eta, \eta[$ on ait : $|\varphi''_\alpha(t) - \varphi''_\alpha(0)| \leq \frac{\varphi''_\alpha(0)}{2}$. On en déduit :

$$\forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \varphi''_\alpha(t) \geq \varphi''_\alpha(0) - \frac{\varphi''_\alpha(0)}{2} = \frac{\varphi''_\alpha(0)}{2} > 0,$$

donc φ''_α est positive sur $] -\eta, \eta[$ et on en déduit que φ_α est convexe sur $] -\eta, \eta[$. Par conséquent le graphe de φ_α est au-dessus de sa tangente en 0, dont l'équation est :

$$y = \varphi_\alpha(0) + \varphi'_\alpha(0)t = \frac{1}{\alpha} (\det(A))^{-\alpha} - \text{Tr}(A^{-1}M) (\det(A))^{-\alpha} t.$$

Ainsi : $\forall t \in]-\eta, \eta[, \varphi_\alpha(t) \geq \frac{1}{\alpha} (\det(A))^{-\alpha} - \text{Tr}(A^{-1}M) (\det(A))^{-\alpha} t$, c'est-à-dire :

$$\forall t \in]-\eta, \eta[, \quad \frac{1}{\alpha} (\det(A + tM))^{-\alpha} \geq \frac{1}{\alpha} (\det(A))^{-\alpha} - \text{Tr}(A^{-1}M) (\det(A))^{-\alpha} t,$$

ce qu'il fallait démontrer.