

# CENTRALE Maths 1 PC 2024

## Eléments de correction

**Q 1.** Si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , pour tout  $n \geq \alpha + 1$ ,  $a_n = 0$  et donc la suite  $(a_n x^n)_n$  est nulle à partir d'un certain rang, donc bornée pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc le rayon de convergence  $R = \sup\{x \geq 0, (a_n x^n)_n \text{ bornée}\} = +\infty$ .

Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \neq 0$  et  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|\alpha - n|}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ .

Donc d'après la règle de D'Alembert, appliquée à une série entière de la forme  $\sum a_n x^n$ ,  $R = 1$ .

**Q 2.** D'après le cours,

$$\forall x \in ]-R, R[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

**Q 3.** On applique la question précédente avec  $\alpha = \frac{1}{2}$ . On a dans ce cas :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1-2k}{2} \right) = \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \prod_{k=0}^{n-1} (2k-1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n! 2^n} \frac{(2n)!}{(2n-1) \prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n! 2^n} \frac{(2n)!}{(2n-1) 2^n (n!)} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} = (-1)^{n+1} b_n \end{aligned}$$

Dans le cas  $\alpha = \frac{1}{2}$ , le rayon de convergence  $R = 1$  d'après Q1, et d'après Q2 :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

**Q 4.** On utilise la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$$

Donc

$$b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (2n-1) (n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} (2n) 2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

On a donc  $b_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$  et la série  $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est convergente donc la série  $\sum b_n$  est absolument convergente donc la série  $\sum (-1)^{n+1} b_n$  est absolument convergente donc convergente.

**Q 5.** Notons pour tout  $x \in [-1, 1]$ ,  $f_n(x) = (-1)^{n+1} b_n x^n$ ,  $|f_n(x)| \leq |b_n| = b_n$  donc  $\|f_n\|_{\infty, [-1, 1]} \leq b_n$  et la série  $\sum b_n$  est convergente d'après la question précédente donc la série  $\sum \|f_n\|_{\infty, [-1, 1]}$  est convergente donc la série de fonctions  $\sum f_n$  converge normalement donc uniformément sur  $[-1, 1]$ .

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est continue donc par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions,  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n$  est continue sur  $[-1, 1]$ , en particulier, elle est continue en  $1^-$  :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

Or pour tout  $x \in ]-1, 1[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n = \sqrt{1+x}$ , par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1+x} = \sqrt{2}$$

**Q 6.** La suite  $(b_n)_{n \geq 1}$  est décroissante car  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\frac{1}{2}}{n+1} < 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$  (cf l'équivalent trouvé en Q4) donc la série  $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} b_n$  vérifie le critère spécial des séries alternées, et donc par la

question de cours; attention à ne pas appliquer d'Alembert dans le cas  $\alpha \in \mathbb{N}$  car  $a_n = 0$  à partir d'un rang

question de cours

calcul classique d'un produit de nombres impairs

Stirling puis produit d'équivalents

point important : justifier

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} b_n$  par continuité de  $S$  en 1 ou par le théorème de la double limite

majoration des restes :

$$\left| \sqrt{2} - \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} b_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+1} b_k x^k \right| \leq |b_{n+1}| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \quad \text{par Q4}$$

**Q 7. Initialisation :**  $c_0(a) > 0$ .

*Hérédité :* soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $c_n(a)$  bien défini et  $c_n(a) > 0$  alors comme  $a \geq 0$ ,

$$c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \geq c_n(a) > 0$$

Par conséquent,  $c_{n+1}(a)$  bien défini et  $c_{n+1}(a) > 0$ .

**Q 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} c_{n+1}(a)^2 - a &= \frac{1}{4c_n(a)^2} (c_n(a)^4 + 2ac_n(a)^2 + a^2) - a = \frac{1}{4c_n(a)^2} (c_n(a)^4 - 2ac_n(a)^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{4c_n(a)^2} (c_n(a)^2 - a)^2 \end{aligned}$$

donc  $c_{n+1}(a)^2 \geq a$  et  $c_{n+1}(a) > 0$  d'où  $c_{n+1}(a) \geq \sqrt{a}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad c_n(a) \geq \sqrt{a}$$

**Q 9.** On déduit de la question précédente que  $(c_n(a))_{n \geq 1}$  est décroissante car

$$c_{n+1}(a) - c_n(a) = \frac{1}{2} \left( -c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right) = \frac{1}{2c_n(a)} (-c_n(a)^2 + a) \leq 0 \quad \text{pour } n \geq 1$$

La suite  $(c_n(a))$  est décroissante et minorée par  $\sqrt{a}$ , elle est donc convergente. Notons  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(a)$ .

Par passage à la limite dans l'égalité  $c_{n+1}(a) = \frac{1}{2} \left( c_n(a) + \frac{a}{c_n(a)} \right)$ ,

$$\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{a}{\ell} \right) \quad \text{donc} \quad \ell^2 - a = 0 \quad \text{d'où} \quad \ell \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$$

Or  $\ell \geq \sqrt{a}$  car  $c_n(a) \geq \sqrt{a}$  d'où  $\ell = \sqrt{a}$ .

**Q 10.** On a  $c_1(2) = \frac{1}{2} \left( c_0(2) + \frac{2}{c_0(2)} \right) = \frac{3}{2}$  donc  $c_1(2)^2 - 2 = \frac{1}{4} = 8 \left( \frac{1}{32} \right)^1$ .

*Hérédité :* soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$ . On a alors :

$$c_{n+1}(2)^2 - 2 = \frac{1}{4c_n(2)^2} (c_n(2)^2 - 2)^2 \leq \frac{1}{4c_n(2)^2} \left[ 8 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right]^2 \leq 8 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^n}$$

en utilisant  $c_n(2)^2 \geq 2$  (Q8).

On en déduit par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c_n(2)^2 - 2 \leq 8 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$  et

$$\left| \sqrt{2} - c_n(2) \right| = \frac{c_n(2)^2 - 2}{c_n(2) + \sqrt{2}} \leq \frac{8}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{\mathcal{O}} \left( \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} \right)$$

**Q 11.** Par croissance comparée  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{3/2} \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} = 0$  donc  $\left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{n^{3/2}} \right)$ .

La suite  $\left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}}$  converge plus vite que  $\left( \frac{1}{n^{3/2}} \right)$ .

**Q 12.** On cherche à calculer  $c_n(2)$  tel que  $|c_n(2) - \sqrt{2}| < 10^{-11}$  pour avoir 10 décimales correctes. D'après l'inégalité de la question Q10, il suffit d'avoir  $\frac{8}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} < 10^{-11}$ , ou encore,  $4 \left( \frac{1}{32} \right)^{2^{n-1}} < 10^{-11}$ .

il fallait penser au CSSA

récurrence élémentaire

argument classique d'une suite est décroissante (à partir du rang 1) et minorée; puis passage à la limite dans la relation de récurrence pour trouver la limite

$c_n(2) + \sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$  par Q8

croissance comparée  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha q^n = 0$  si  $|q| < 1$

```

n=0
c2 = 1
eps = 10**(-11)
while 4*(1/32)**(2**n - 1) >= eps :
    c2 = (c2 + 2/c2)/2
    n = n+1
print (c2)

```

**Q 13.** Les matrices de  $O(2)$  sont les matrices de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}$$

**Q 14.** On a  $S(\theta)^2 = I_2$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $R(\pi)^2 = I_2$ .

De plus  $R(\theta)^2 = R(2\theta) \neq I_2$  si  $\theta \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

Les racines carrées de  $I_2$  dans  $O(2)$  sont  $R(0) = I_2, R(\pi)$  et  $S(\theta), \theta \in \mathbb{R}$ .

$I_2$  possède une infinité de racines carrées.

**Q 15.** Une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

**Q 16.**  $M$  est symétrique réelle donc d'après le théorème spectral,

il existe  $P \in O(q)$  et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q)$  tel que  $M = PDP^{-1} = PDP^T$ .

On pose  $B = P\Delta P^T$  avec  $\Delta = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})$  (possible car les valeurs propres de  $M$  sont positives :  $\lambda_i \geq 0$ ).

On a alors  $B^2 = P\Delta^2 P^T = PDP^T = M$ .

Et la matrice  $B$  est symétrique ( $B^T = B$ ) positive car ses valeurs propres ( $\sqrt{\lambda_i}$ ) sont positives.

**Q 17 (rédaction 1).** Soit  $C$  une matrice symétrique positive vérifiant  $B^2 = C^2 = M$ . Montrons que  $B = C$ . Pour cela, on va montrer que les applications linéaires  $f : x \mapsto Bx$  et  $g : x \mapsto Cx$  sont égales sur chacun des sous-espaces propres de  $M$ ,  $\text{Ker}(M - \lambda I_q)$ .

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ . Notons  $E_\lambda = \text{Ker}(M - \lambda I_q)$ .

On a  $BM = B^3 = MB$  donc  $E_\lambda$  est stable par  $f$  (on pourrait dire par  $B$ ).

L'endomorphisme induit par  $f$  sur  $E_\lambda$ , noté  $f_\lambda$ , est diagonalisable car  $f$  est diagonalisable.

On cherche le spectre de  $f_\lambda$ .

Soit  $\mu \in \text{Sp}(f_\lambda)$ . Alors il existe  $x \in E_\lambda$ , non nul, tel que  $f_\lambda(x) = \mu x$ , c'est-à-dire  $Bx = \mu x$ . On a  $\mu \geq 0$  car  $B$  est symétrique positive et

$$\lambda x = Mx = B^2x = \mu^2 x \quad \text{d'où} \quad \lambda = \mu^2 \quad \text{donc} \quad \mu = \sqrt{\lambda}$$

Par conséquent,  $\text{Sp}(f_\lambda) = \{\sqrt{\lambda}\}$  et  $f_\lambda$  étant diagonalisable, on en déduit que  $f_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{id}_{E_\lambda}$ .

On montre de même que l'endomorphisme induit par  $g : x \mapsto Cx$  sur  $E_\lambda$  est  $g_\lambda = \sqrt{\lambda} \text{id}_{E_\lambda} = f_\lambda$ .

Donc pour tout  $x \in E_\lambda$ ,  $f_\lambda(x) = g_\lambda(x) = \sqrt{\lambda}x$ , soit  $Bx = Cx$ .

Or  $M$  étant diagonalisable (th. spectral),  $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \text{Ker}(M - \lambda I_q)$ ;

on en déduit  $Bx = Cx$  pour tout  $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  d'où  $B = C$ .

**Q 17 (rédaction 2).** On reprend les notations précédentes. L'idée principale reste identique, on veut montrer que  $Bx = Cx$  pour tout  $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$  et pour cela, il suffit de le vérifier sur chacun des sous-espaces propres de  $M$ ,  $\text{Ker}(M - \lambda I_q)$ . Le point crucial de la démonstration est d'obtenir que pour  $x \in \text{Ker}(M - \lambda I_q)$ ,  $Bx = Cx = \sqrt{\lambda}x$ , c'est-à-dire,  $x \in \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda}I_q)$  (et  $x \in \text{Ker}(B - \sqrt{\lambda}I_q)$ )

On souhaite donc montrer l'inclusion  $\text{Ker}(M - \lambda I_q) \subset \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda}I_q)$  (il suffit de le faire pour  $C$ , car on en déduira le résultat pour  $B$  qui vérifie les mêmes hypothèses que  $C$ ).

Montrons que  $\text{Ker}(M - \lambda I_q) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda}I_q)$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ .

L'inclusion  $\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda}I_q) \subset \text{Ker}(M - \lambda I_q)$  est élémentaire.

On va montrer l'égalité des dimensions pour conclure.

On a  $C$  symétrique réelle donc diagonalisable :  $C = P\Delta P^{-1}$  d'où  $M = C^2 = P\Delta^2 P^{-1}$ .

cours matrices orthogonales  $2 \times 2$

cours question ultra-classique d'application du théorème spectral

l'unicité est plus délicate que l'existence. Rédaction 1 : on considère l'endomorphisme induit par  $B$  sur chacun des sous-espaces propres de  $M$

rédaction 2 : on raisonne sur les dimensions pour montrer que  $\text{Ker}(M - \lambda I_q) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda}I_q)$

On en déduit que  $\text{Sp}(M) = \{\mu^2, \mu \in \text{Sp}(C)\}$  et comme  $\text{Sp}(C) \subset \mathbb{R}_+$ ,  $\text{Sp}(C) = \{\sqrt{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(M)\}$ . Par conséquent,  $M$  et  $C$  étant diagonalisable par le théorème spectral,

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim [\text{Ker}(M - \lambda I_q)] = q = \sum_{\mu \in \text{Sp}(C)} \dim [\text{Ker}(C - \mu I_q)] = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \dim [\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)]$$

D'où :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(M)} \underbrace{\left[ \dim(\text{Ker}(M - \lambda I_q)) - \dim(\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)) \right]}_{\geq 0 \text{ car } \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q) \subset \text{Ker}(M - \lambda I_q)} = 0$$

Une somme nulle de nombres positifs ou nuls implique que tous ces nombres sont nuls et on en déduit l'égalité souhaitée pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$  :

$$\dim(\text{Ker}(M - \lambda I_q)) = \dim(\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q))$$

**Q 17 (rédaction 3)** Supposons  $C^2 = M$  avec  $C$  symétrique réelle. Montrons pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , l'égalité  $\text{Ker}(M - \lambda I_q) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$  qui est le point clé de la démonstration.

L'inclusion  $\text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q) \subset \text{Ker}(M - \lambda I_q)$  est élémentaire.

Montrons l'autre inclusion,  $\text{Ker}(M - \lambda I_q) \subset \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$

1er cas :  $\lambda = 0$ . On a  $C$  diagonalisable car symétrique réelle, donc  $C$  est semblable à une matrice diagonale  $\Delta$  donc  $\text{rg}(C) = \text{rg}(\Delta) = \text{rg}(\Delta^2) = \text{rg}(C^2) = \text{rg}(M)$  en utilisant que pour une matrice diagonale  $\text{rg}(\Delta) = \text{rg}(\Delta^2)$ .

Par le théorème du rang, on en déduit  $\dim(\text{Ker } C) = \dim(\text{Ker } M)$  ; mais on a aussi  $\text{Ker}(C) \subset \text{Ker}(M)$  d'où l'égalité  $\text{Ker}(C) = \text{Ker}(M)$ .

Deuxième cas :  $\lambda > 0$ . Soit  $x \in \text{Ker}(M - \lambda I_q)$ . On a en posant  $y = (C - \sqrt{\lambda} I_q)x$  :

$$(C + \sqrt{\lambda} I_q)y = (C + \sqrt{\lambda} I_q)(C - \sqrt{\lambda} I_q)x = (C^2 - \lambda I_q)x = (M - \lambda I_q)x = 0$$

Donc  $y \in \text{Ker}(C + \sqrt{\lambda} I_q)$  et  $\text{Ker}(C + \sqrt{\lambda} I_q) = \{0\}$  car  $-\sqrt{\lambda}$  n'est pas valeur propre de  $C$  car  $C$  symétrique positive donc ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Donc  $y = 0$  soit  $x \in \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$ .

**Q 18. Initialisation** :  $M_0 = I_q$  est bien définie et on a  $c_0(\lambda_i) = 1$  donc :

$P \text{diag}(c_0(\lambda_1), \dots, c_0(\lambda_q)) P^T = P I_q P^T = I_q$  car  $P \in O(q)$ .

**Hérédité** : soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $M_n = P \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T$ .

On a d'après la question Q7,  $c_n(\lambda_i) > 0$  donc  $\det(M_n) = \prod_{i=1}^q c_n(\lambda_i) > 0$  et par conséquent  $M_n$  est inversible.

Par conséquent, la matrice  $M_{n+1} = \frac{1}{2}(M_n + M M_n^{-1})$  est bien définie.

De plus, on a  $M_n^{-1} = P \text{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T$  d'où :

$$\begin{aligned} M M_n^{-1} &= P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \underbrace{P^T P}_{=I_q} \text{diag}\left(\frac{1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{1}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T \\ &= P \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) P^T \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \frac{1}{2}(M_n + M M_n^{-1}) = \frac{1}{2} P \left[ \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) + \text{diag}\left(\frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}, \dots, \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right) \right] P^T \\ &= P \text{diag}\left(\frac{1}{2}\left(c_n(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{c_n(\lambda_1)}\right), \dots, \frac{1}{2}\left(c_n(\lambda_q) + \frac{\lambda_q}{c_n(\lambda_q)}\right)\right) P^T \\ &= P \text{diag}(c_{n+1}(\lambda_1), \dots, c_{n+1}(\lambda_q)) P^T \end{aligned}$$

**Q 19.** On a pour tout  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$  d'après Q9. Donc par la caractérisation de la

rédaction 3 : on montre l'égalité  $\text{Ker}(M - \lambda I_q) = \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_q)$  par double inclusion, en utilisant l'égalité  $(M - \lambda I_q) = (C + \sqrt{\lambda} I_q)(C - \sqrt{\lambda} I_q)$

limite d'une suite de matrices, par la limite des suites coordonnées :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q})$$

Et l'application  $\varphi : M \mapsto PMP^T$  est linéaire sur  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  qui est de dimension finie donc  $\varphi$  est continue d'où :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (P \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) P^T) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q))) \\ &= \varphi \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diag}(c_n(\lambda_1), \dots, c_n(\lambda_q)) \right] \\ &= P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_q}) P^T = \sqrt{M} \end{aligned}$$

la continuité de  $M \mapsto PMP^T$  est importante à invoquer pour le calcul de la limite

**Q 20.**  $f$  a au plus un point d'annulation sur  $I$ . En effet, si  $f$  possède deux points d'annulation  $c_1$  et  $c_2 \in I$ , avec  $c_1 < c_2$ . On a  $f(c_1) = f(c_2) = 0$ .  $f$  étant continue sur  $[c_1, c_2]$  et dérivable sur  $]c_1, c_2[$  alors d'après le théorème de Rolle, il existe  $c_3 \in ]c_1, c_2[$ ,  $f'(c_3) = 0$  absurde car  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ .

théorème de Rolle

**Q 21.**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $I$  donc  $f''$  est continue sur le segment  $J_r$  donc  $f''$  est bornée sur  $J_r$  (et ses bornes sont atteintes) donc  $\sup_{J_r} |f''|$  est bien défini (et c'est un max).

continuité sur un segment : théorème des bornes atteintes

De même  $f'$  est continue sur le segment  $J_r$ , donc  $|f'|$  aussi (par composée de fonctions continues) et donc  $|f'|$  est bornée, et elle atteint ses bornes :  $i_r = \inf_{J_r} |f'| = \min_{J_r} |f'|$  est bien défini (et l'inf est atteint). De plus,  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , donc ne s'annule pas sur  $J_r$  donc  $i_r = \min_{J_r} |f'| > 0$ .

**Q 22.**  $I$  est un intervalle ouvert non vide et  $c \in I$  donc il existe  $r_0 > 0$  tel que  $J_{r_0} \subset I$ .

De plus, on a pour tout  $r \in ]0, r_0]$ ,  $J_r \subset J_{r_0}$  donc  $s_r \leq s_{r_0}$  et  $i_r \geq i_{r_0}$  et par conséquent,  $K_r \leq K_{r_0}$ .

Si  $K_{r_0} = 0$ , alors  $r = r_0$  vérifie  $rK_r = 0$  donc  $0 \leq rK_r < 1$ .

Si  $K_{r_0} > 0$ , alors on considère  $r \in ]0, \frac{1}{K_{r_0}}[$ . On a alors  $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0} < 1$ .

*Autre rédaction :* on a pour tout  $r \in ]0, r_0[$ ,  $0 \leq rK_r \leq rK_{r_0}$  donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{r \rightarrow 0^+} rK_r = 0$  donc il existe  $r > 0$  tel que  $rK_r < 1$ .

**Q 23.**  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $J_r$  et  $|f''| \leq s_r$ . Donc on peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :

$$\left| \underbrace{f(c)}_{=0} - f(c_n) - f'(c_n)(c - c_n) \right| \leq \frac{s_r}{2} |c - c_n|^2$$

Par conséquent, en utilisant  $|f'(c_n)| > i_r$ ,

$$|c_{n+1} - c| = \left| \frac{f'(c_n)c_n - f(c_n) - f'(c_n)c}{f'(c_n)} \right| \leq \frac{s_r}{2|f'(c_n)|} |c_n - c|^2 \leq \frac{s_r}{2i_r} |c_n - c|^2 = K_r |c_n - c|^2$$

On a  $c_n \in J_r$  donc  $|c_n - c| \leq r$  d'où

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r |c_n - c|^2 \leq K_r r^2 = \underbrace{(rK_r)}_{< 1} r \leq r$$

Par conséquent,  $c_{n+1} \in [c - r, c + r] = J_r$ .

**Q 24.** On procède par récurrence sur  $n$ .

*Initialisation :* l'inégalité est une égalité pour  $n = 0$ .

*Hérédité :* soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $|c_n - c| \leq \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r}$  et  $c_n \in J_r$ .

On a alors par la question précédente,  $c_{n+1} \in J_r$  et

$$|c_{n+1} - c| \leq K_r |c_n - c|^2 \leq K_r \left( \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \right)^2 = \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^{n+1}}}{K_r}$$

Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

De plus,  $c_0 \in J_r$  donc  $|c_0 - c| \leq r$  d'où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq |c_n - c| \leq \frac{(K_r |c_0 - c|)^{2^n}}{K_r} \leq \frac{(rK_r)^{2^n}}{K_r}$$

Or  $0 \leq rK_r < 1$  d'après Q22,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (rK_r)^{2^n} = 0$  donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |c_n - c| = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$$

**Q 25.**

```
def newton(c0, f, df) :
    cn = c0
    for n in range(51) :
        if abs(f(cn)) < 10**(-10) :
            return cn
    cn = cn - (f(cn)/df(cn))
```

**Q 26.** Soit  $\mu$  une racine complexe de  $P'$ . Alors  $\mu$  n'est pas racine de  $P$  car  $P$  est scindé à racines simples. Par conséquent,  $\mu$  n'est pas valeur propre de  $M$  donc  $M - \mu I_q$  est inversible.

On décompose  $P' = \prod_{i=1}^{s'} (X - \mu_i)^{n_i}$ . On a alors  $P'(M) = \prod_{i=1}^{s'} (M - \mu_i I_q)^{n_i}$ .

D'après ce qui précède, pour tout  $i \in \llbracket 1, s' \rrbracket$ ,  $M - \mu_i I_q$  est inversible, donc  $P'(M)$  est un produit de matrices inversibles, donc  $P'(M)$  est inversible.

**Q 27.** On a  $\chi_M = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$  avec  $\alpha_i \leq q$  car  $\deg(\chi_M) = q$ .

Par conséquent,

$$P^q = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^q = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{\alpha_i} (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i} = \chi_M \underbrace{\prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)^{q - \alpha_i}}_{\in \mathbb{C}[X] \text{ car } q \geq \alpha_i}$$

Donc  $\chi_M$  divise  $P^q$ , il existe  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P^q = \chi_M Q$ .

On en déduit  $P(M)^q = \chi_M(M)Q(M) = 0$  d'après le théorème de Cayley-Hamilton ( $\chi_M(M) = 0$ ).

Donc  $P(M)$  est nilpotente.

**Q 28.** On utilise l'existence de  $B_n \in \mathbb{C}[M]$  telle que  $P(M_n) = (P(M))^{2^n} B_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $2^n > q$ . On a alors  $P(M)^{2^n} = 0$  d'après la question précédente donc,  $P(M_n) = 0$  et par conséquent,  $M_{n+1} = M_n$ . Ce qui montre que la suite  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.

**Q 29.** Montrons par récurrence que  $M$  et  $M_n$  commutent.

*Init* : pour  $n = 0$ ,  $M_n = M_0 = M$  donc le résultat est clair.

*Hérédité* : soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $M$  et  $M_n$  commutent.

On a  $P(M_n) = P(M)^{2^n} B_n$  avec  $B_n \in \mathbb{C}[M]$  donc  $P(M_n) \in \mathbb{C}[M]$  donc  $MP(M_n) = P(M_n)M$ .

On a  $P(M_n) \in \mathbb{C}[M]$  donc  $P'(M_n) \in \mathbb{C}[M]$  donc  $MP'(M_n) = P'(M_n)M$  et par conséquent,  $MP'(M_n)^{-1} = P'(M_n)^{-1}M$ . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} MM_{n+1} &= \underbrace{MM_n}_{=M_n M} - \underbrace{MP(M_n)}_{=P(M_n)M} P'(M_n)^{-1} = M_n M - P(M_n) \underbrace{MP'(M_n)^{-1}}_{=P'(M_n)^{-1}M} = (M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1}) M \\ &= M_{n+1} M \end{aligned}$$

**Q 30.** En reprenant le raisonnement de la question 28, pour tout  $n$  tel que  $2^n \geq q$ ,  $P(M_n) = 0$  et

cours :  $M - \mu I_q$  inversible  
ssi  $\mu \in \text{Sp}(M)$

caractérisation de  $A$  diagonalisable par existence d'un polynôme annulateur scindé simple

$M_n = A$ . D'où  $P(A) = 0$  :  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ , scindé à racines simples donc  $A$  est diagonalisable.

**Q 31.** D'après Q29,  $M$  et  $M_n$  commutent pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et comme il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $A = M_{n_0}$ ,  $M$  et  $A$  commutent. Par conséquent,  $AN = A(M - A) = AM - A^2 = MA - A^2 = (M - A)A = NA$ .

Soit  $n_0$  tel que  $M_{n_0+1} = A$ . On a alors

$$\begin{aligned} N = M - A = M_0 - M_{n_0+1} &= \sum_{n=0}^{n_0} (M_n - M_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} P(M_n)P'(M_n)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} P(M)^{2^n} B_n P'(M_n)^{-1} \\ &= P(M) \underbrace{\sum_{n=0}^{n_0} P(M)^{2^n - 1} B_n P'(M_n)^{-1}}_{=C} = P(M)C \end{aligned}$$

$P(M)$  et  $C$  commute car  $B_n \in \mathbb{C}[M]$  et  $P'(M_n) \in \mathbb{C}[M]$  donc

$$N^q = P(M)^q C^q = 0 \quad \text{car} \quad P(M)^q = 0 \quad (\text{Q27})$$

**Q 32.** On écrit le développement limité en 0 de  $\sqrt{1+x}$  à l'ordre  $q-1$ , en reprenant les notations de la question 3 :

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^{n+1} b_n x^n + o(x^{q-1}) = R_q(x) + o(x^{q-1}) \quad \text{avec} \quad R_q(x) = \sum_{n=0}^{q-1} (-1)^{n+1} b_n x^n$$

Alors par produit de DL :

$$1+x = \sqrt{1+x}^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} R_q(x)^2 + o(x^{q-1}) \quad \text{donc} \quad 1+x - R_q(x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{q-1})$$

Par conséquent, le monôme de plus petit degré dans le polynôme  $1+X - R_q(X)^2$  est  $a_n X^n$  avec  $n \geq q$ , autrement dit :

$$1+X - R_q(X)^2 = \sum_{k=q}^{2q-2} a_k X^k = X^q \sum_{k=0}^{q-2} a_{k+q} X^{k+q} = X^q Q(X) \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X]$$

Donc  $X^q$  divise  $1+X - R_q(X)^2$ .

**Q 33.** Soit  $N$  une matrice nilpotente de  $\mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ . Alors  $N^q = 0$ . Rappelons rapidement pourquoi : il existe un entier  $k$  tel que  $N^k = 0$ . Alors  $X^k$  est un polynôme annulateur de  $N$  et les valeurs propres de  $N$  appartiennent donc à l'ensemble des racines de  $X^k$ , qui est réduit à  $\{0\}$ . Donc  $\text{Sp}(N) = \{0\}$  (le spectre n'est pas vide dans  $\mathbb{C}$  car le polynôme caractéristique possède au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ ).

Donc le polynôme caractéristique de  $N$  est  $\chi_N = X^q$  et donc par le théorème de Cayley-Hamilton,  $N^q = 0$ .

En reprenant le polynôme  $R_q$  de la question précédente, on a :

$$I_q + N - R_q(N)^2 = N^q Q(N) = 0 \quad \text{donc} \quad R_q(N)^2 = I_q + N$$

Donc  $R_q(N)$  est une racine carrée de  $I_q + N$ .

**Q 34.** On montre par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M_n$  est à coefficients réels :

$$M_0 = M \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}).$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $M_n \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ . Les valeurs propres de  $M$  sont réelles car  $M$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ ; par conséquent,  $P = \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i) \in \mathbb{R}[X]$ .

Donc  $P(M_n) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  et  $P'(M_n) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$  et par conséquent,  $P'(M_n)^{-1} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ .

D'où  $M_{n+1} = M_n - P(M_n)P'(M_n)^{-1} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ . Ce qui termine la récurrence.

La suite  $(M_n)$  étant stationnaire ; constante égale à  $A$  à partir d'un certain rang,  $A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ .

Puis  $N = M - A \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ .

En reprenant la démonstration de la question Q30, on a  $P(A) = 0$ , et  $P$  est un polynôme scindé à racines simples dans  $\mathbb{R}$  (les valeurs propres de  $M$ ) donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ .

**Q 35.** On a  $P(A) = 0$  donc toute valeur propre de  $A$  est racine de  $P$  :

$\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P\} = \text{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+^*$ . Donc  $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$ .

**Q 36.** Les valeurs propres de  $A$ , notées  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_q$ , étant strictement positives, on peut reprendre la méthode vue en II.C, pour obtenir une racine carrée de  $A$ , à partir de  $A = P \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_q) P^{-1}$  :

en posant  $A' = P \text{diag}(\sqrt{\lambda'_1}, \dots, \sqrt{\lambda'_q}) P^{-1}$ , on a  $(A')^2 = A$ .

On a alors  $M = A + N = A(I_q + A^{-1}N)$ .

Les matrices  $A$  et  $N$  commutent donc  $A^{-1}$  et  $N$  commutent donc  $(A^{-1}N)^q = (A^{-1})^q N^q = 0$ .

$A^{-1}N$  est donc nilpotente donc en utilisant la question Q33,  $(R_q(A^{-1}N))^2 = I_d + A^{-1}N$ .

Les matrices  $A'$  et  $R_q(A^{-1}N)$  commutent (cf ci-dessous) donc

$$(A'R_q(A^{-1}N))^2 = (A')^2 (R_q(A^{-1}N))^2 = A(I_q + A^{-1}N) = M$$

Donc  $A'R_q(A^{-1}N)$  est une racine carrée de  $M$ .

Précisons pourquoi  $A'$  et  $R_q(A^{-1}N)$  commutent.

En notant  $\lambda'_1, \dots, \lambda'_s$  les valeurs propres deux à deux distinctes de  $A$ .

Alors en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange par exemple, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{R}[X]$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, \quad \sqrt{\lambda'_i} = Q(\lambda_i)$$

On a alors  $A' = P \text{diag}(\sqrt{\lambda'_1}, \dots, \sqrt{\lambda'_q}) P^{-1} = \dots = Q(A)$  donc  $A' \in \mathbb{C}[A]$ .

Or  $A^{-1}N$  commute avec  $A$  car  $A$  et  $N$  commutent donc  $A'$  et  $R_q(A^{-1}N)$  commutent.