Centrale-Supélec PC 2021 — Maths 2

Denis Jourdan, Lycée du Parc, Lyon

Pour obtenir le fichier source ou me signaler des erreurs : `denis.jourdan@ac-lyon.fr`

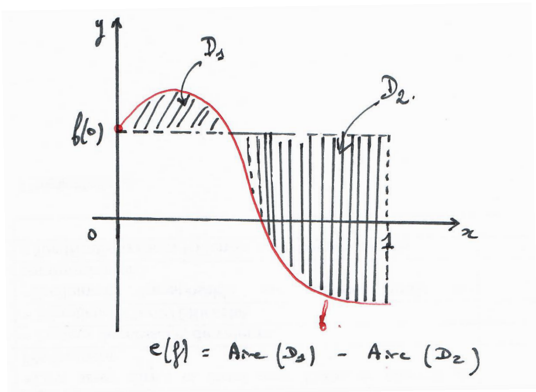
Remarque : Soient m et n dans $\mathbb{N}$.

Vu que e est linéaire, une formule de quadrature $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_m[X]$ si, et seulement si pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, $e(X^k) = 0$.

La formule de quadrature $I_n(f)$ est donc d'ordre m si et seulement si pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, $e(X^k) = 0$ et $e(X^{m+1}) \neq 0$.

Q 1. Si $I_0(f) = f(0)$, alors $e(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - f(0)$. On calcule $e(1) = 0$ et $e(X) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ donc

$$\boxed{\text{L'ordre de la formule de quadrature } I_0(f) = f(0) \text{ est égal à } 0.}$$



Q 2. Si $I_0(f) = f(1/2)$, alors $e(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - f(1/2)$. On calcule $e(1) = e(X) = 0$ et $e(X^2) = 1/3 - 1/4 \neq 0$ donc

$$\boxed{\text{L'ordre de la formule de quadrature } I_0(f) = f(1/2) \text{ est égal à } 1.}$$

Q 3. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$.

La formule de quadrature $I_2(f) = \lambda_0 f(0) + \lambda_1 f(1/2) + \lambda_2 f(1)$ est exacte sur $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si

$$e(1) = e(X) = e(X^2) = 0 \text{ c'est-à-dire } \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 & = & \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}t = 1 \\ \lambda_1/2 + \lambda_2 & = & \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = 1/2 \\ \lambda_1/4 + \lambda_2 & = & \displaystyle\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = 1/3 \end{array}\right. \quad \textit{i.e. } (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (1/6, 2/3, 1/6).$$

Pour ce choix de $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, on calcule :

$e(X^3) = \displaystyle\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t - \lambda_1/8 - \lambda_2 = 1/4 - 1/12 - 1/6 = 0$ et $e(X^4) = \displaystyle\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t - \lambda_1/16 - \lambda_2 = 1/5 - 1/24 - 1/6 = -1/120 \neq 0.$

$$\boxed{\text{La formule de quadrature } I_2(f) = \frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f(1/2) + \frac{1}{6}f(1) \text{ est d'ordre } 3.}$$

Q 4. D'après l'énoncé, l'application φ est linéaire.

Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$: P admet $n+1$ racines distinctes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et P est de degré au plus n donc P est le polynôme nul.

L'application φ est donc injective.

De plus les espaces de départ $\mathbb{R}_n[X]$ et d'arrivée $\mathbb{R}^{n+1}$ ont la même dimension (à savoir $n+1$) donc φ est un isomorphisme.

Q 5. Notons $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour i et j dans $\mathbb{N}$, on pose aussi $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$. Soit $i \in [\![0, n]\!]$.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a les équivalences :

$$(\forall j \in [\![0, n]\!],\ P(x_j) = \delta_{i,j}) \iff \varphi(P) = \varepsilon_i \iff P = \varphi^{-1}(\varepsilon_i)$$

$$\boxed{\text{Il existe un unique } L_i \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } \forall j \in [\![0, n]\!],\ P(x_j) = \delta_{i,j} \text{ : il s'agit de } L_i = \varphi^{-1}(\varepsilon_i).}$$

Q 6. L'image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme φ^{-1} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Q 7. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L_k w$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto x^i w(x)$ donc est intégrable sur I et

$$e(L_k) = \int_I L_k(x) w(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_k(x_j) = \int_I L_k(x) w(x)\,\mathrm{d}x - \lambda_k.$$

- Si la formule $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $e(L_k) = 0$ *i.e.* $\lambda_k = \int_I L_k(x) w(x)\,\mathrm{d}x$.
- Réciproquement, si pour tout $k \in [\![0, n]\!], \lambda_k = \int_I L_k(x) w(x)\,\mathrm{d}x$, alors $e(L_0) = e(L_1) = \ldots, e(L_n) = 0$.
  Or e est linéaire et $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc e est nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$.
  Autrement dit, la formule de quadrature $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\boxed{\text{La formule } I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j) \text{ est exacte sur } \mathbb{R}_n[X] \text{ si, et seulement si } \forall k \in [\![0, n]\!], \lambda_k = \int_I L_k(x) w(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Q 8. On prend $(x_0, x_1, x_2) = (0, 1/2, 1)$.

Considérons $P_0(X) = \dfrac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = (X-1)(2X-1)$.

$P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_0(x_0) = 1, P_0(x_1) = P_0(x_2) = 0$. Donc d'après **Q5.** $P_0 = L_0$. On obtient de même L_1 et L_2 :

$$\boxed{L_0(X) = (X-1)(2X-1),\ L_1(X) = 4X(1-X) \text{ et } L_2(X) = X(2X-1).}$$

On calcule ensuite

$$\begin{cases} \lambda_0 = \int_0^1 L_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t^2 - 3t + 1)\,\mathrm{d}t = 1/6 \\ \lambda_1 = \int_0^1 L_1(t)\,\mathrm{d}t = 4\int_0^1 (t - t^2)\,\mathrm{d}t = 2/3 \\ \lambda_2 = \int_0^1 L_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t^2 - t)\,\mathrm{d}t = 1/6 \end{cases}$$

et on retrouve bien les coefficients de la formule de quadrature $I_2(f)$ de **Q3.**

Q 9. Soit $x \in [a,b]$. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^{m+1}$ sur $[a,b]$, la formule de Taylor avec reste intégral fournit :

$$f(x) = T_m(x) + R_m(x) \text{ en posant } T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \text{ et } R_m(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Vu que pour tout $t \in [x,b]$, $\varphi_m(x,t) = 0$, on a

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a donc, en libérant x :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = T_m(x) + R_m(x) \text{ avec } R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus T_m est polynomiale de degré au plus m donc par hypothèse $e(T_m) = 0$. On conclut en utilisant la linéarité de e :

$$\boxed{e(f) = e(R_m) \text{ en posant } R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Q 10. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.

$$e(R_m) = \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t \right) w(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \frac{1}{m!} \int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Avec la linéarité de l'intégrale :

$$e(R_m) = \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t) w(x)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x - \frac{1}{m!} \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction φ_m est continue sur $\mathbb{R}^2$ car $m \geqslant 1$ (ce qui est clair en observant que $\varphi_m(x,t) = \left(\frac{x-t+|x-t|}{2} \right)^m$ et qui est de toute façon admis par l'énoncé). De plus, les fonctions $f^{(m+1)}$et w sont continues sur $[a,b]$ par hypothèse, donc la fonction $(x,t) \mapsto \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t) w(x)$ est continue sur $[a,b]^2$, ce qui permet d'utiliser le résultat admis par l'énoncé :

$$e(R_m) = \frac{1}{m!} \int_a^b \left(\int_a^b \varphi_m(x,t) w(x)\,\mathrm{d}x \right) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m!} \int_a^b \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_m(x,t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

D'où le résultat en regroupant les deux intégrales :

$$\boxed{e(R_m) = \frac{1}{m!} \int_a^b K_m(t) f^{(m+1)}(t)\,\mathrm{d}t \text{ en posant } K_m = e(x \mapsto \varphi_m(x,t)).}$$

Q 11. Ici, $e(g) = \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{g(0)+g(1)}{2}$.

Fixons t dans $[0,1]$. Observons que $\forall x \in [0,1],\ \varphi_1(x,t) = \max(x-t,0)$.

$$K_1(t) = \int_0^1 \varphi_1(x,t)\,\mathrm{d}x - \frac{\varphi_1(0,t)+\varphi_1(1,t)}{2} = \cancel{\int_0^t \varphi_1(x,t)\,\mathrm{d}x} + \int_t^1 (x-t)\,\mathrm{d}x - \frac{\cancel{\max(-t,0)} + \max(1-t,0)}{2}.$$

D'où $K_1(t) = \left[\frac{(x-t)^2}{2} \right]_t^1 - \frac{1-t}{2} = \frac{t(t-1)}{2}$.

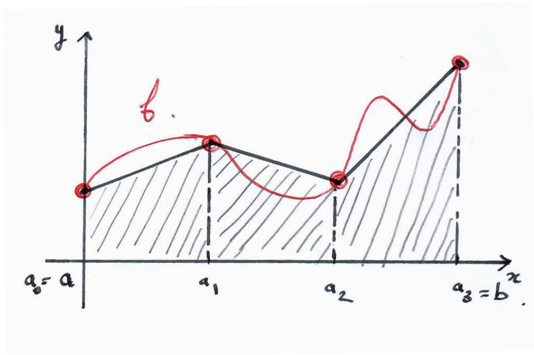
$$\boxed{\forall t \in [0,1],\ K_1(t) = \frac{t(t-1)}{2}.}$$

D'après **Q10.** $e(g) = \int_0^1 K_1(t) g''(t)\,\mathrm{d}t$.

La fonction g'' est continue sur le segment $[0,1]$ donc $\sup_{x \in [0,1]} |g''(x)|$ existe et

$$\boxed{|e(g)| \leqslant \int_0^1 \left|K_1(t)g''(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \sup_{x\in[0,1]} \left|g''(x)\right| \int_0^1 \frac{t-t^2}{2} \mathrm{d}t = \frac{1}{12} \sup_{x\in[0,1]} \left|g''(x)\right|}$$

Q 12. Pour $n = 3$, $T_3(f)$ est la somme des aires des trapèzes hachurés.



Q 13. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Commençons par transformer l'expression de $e_n(f)$:

$$\begin{aligned}
e_n(f) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2} \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\,\mathrm{d}x && \text{avec la relation de Chasles} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(f(x) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right) \mathrm{d}x && \text{avec la linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, le changement de variable affine : $\boxed{x = ta_{i+1} + (1-t)a_i = \frac{b-a}{n}t + a_i}$ fournit :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left(f(x) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right) = \frac{b-a}{n} \int_0^1 \left(f(ta_{i+1} + (1-t)a_i) - \frac{f(a_i)+f(a_{i+1})}{2}\right) \mathrm{d}t = \frac{b-a}{n} e(g_i)$$

en posant $\boxed{g_i(t) = f(ta_{i+1} + (1-t)a_i)}$ et $e(g_i) = \displaystyle\int_0^1 g_i(t)\,\mathrm{d}t - \frac{g_i(0)+g_i(1)}{2}$.

Avec ces notations, on obtient bien :

$$\boxed{e_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e(g_i)}$$

Q 14. En utilisant l'inégalité triangulaire, puis la question **Q11.**, il vient :

$$|e_n(f)| \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |e(g_i)| \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{12} \sup_{t\in[0,1]} \left|g_i''(t)\right|.$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\forall t \in [0,1],\ g_i''(t) = (a_{i+1} - a_i)^2 f''(ta_{i+1} + (1-t)a_i) = \frac{(b-a)^2}{n^2} f''(ta_{i+1} + (1-t)a_i)$$

et lorsque t décrit le segment $[0,1]$, $ta_{i+1} + (1-t)a_i$ décrit le segment $[a_i, a_{i+1}]$, donc

$$\forall t \in [0,1],\ \left|g_i''(t)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{x\in[a_i,a_{i+1}]} \left|f''(x)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.$$

En particulier,

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \sup_{t\in[0,1]} \left|g_i''(t)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|.$$

Finalement,

$$\boxed{|e_n(f)| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{12}\frac{(b-a)^2}{n^2}\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.}$$

Q 15. Soient f et g dans E.

- La fonction fgw est continue sur I.
- Pour tous réels a et b, $(|a|-|b|)^2 \geqslant 0$ donc en développant on obtient $|ab| \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$.

  Il s'ensuit que $\forall t \in I,\ |f(t)g(t)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(t)|^2+|g(t)|^2)$, d'où, en multipliant par $w(t) \geqslant 0$:

$$\forall t \in I,\ |f(t)g(t)w(t)| \leqslant \frac{1}{2}(|f(t)|^2 w(t) + |g(t)|^2 w(t))$$

  La fonction $t \mapsto \frac{1}{2}(|f(t)|^2 w(t) + |g(t)|^2 w(t))$ est intégrable sur I (comme combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I) et on conclut grâce au théorème de comparaison sur les fonctions intégrables.

$$\boxed{\text{Pour tout } (f,g) \in E^2, \text{ la fonction } fgw \text{ est intégrable sur } I.}$$

Q 16. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

- E est contenu dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, et la fonction nulle appartient clairement à E.
- Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

  La fonction $(\lambda f+\mu g)^2 w = \lambda^2 f^2 w + 2\lambda\mu fgw + \mu^2 g^2$ est intégrable sur I comme combinaison linéaire de trois fonctions intégrables sur I (d'après **Q15.**).

  Donc $\lambda f + \mu g$ appartient à E.

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel}}$$

Q 17.
- $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ est une application de E^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'après **Q15.**
- $\langle .,.\rangle$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale et on a évidemment $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$.
- Soit $f \in E$ non nulle. La fonction $f^2 w$ est **continue,intégrable, positive et non identiquement nulle** (car w est à valeurs strictement positives) sur I, donc son intégrale sur I qui vaut $\langle f,f\rangle$ est strictement positive.

$$\boxed{\text{L'application définie par } \langle f,g\rangle = \int_I f(x)g(x)w(x)\,\mathrm{d}x \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

Les remarques suivantes seront utilisées dans les questions **Q18.** à **Q20.** :

Remarque 1 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ est une famille orthogonale de $n+1$ polynômes **non nuls** de $\mathbb{R}_n[X]$; $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

Remarque 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_{n+1} est donc orthogonal à tout polynôme de $\mathrm{Vect}(p_0, p_1, \ldots, p_n) = \mathbb{R}_n[X]$.

Q 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

NB : L'énoncé suppose que p_n a au moins une racine dans l'intérieur de I, ce qui n'est pas évident.

- Supposons que p_n n'ait pas de racine dans l'intérieur de I, alors par continuité p_n garde un signe constant sur l'intérieur de I et donc sur I.

  La fonction $x \mapsto p_n(x)w(x)$ est continue, intégrable sur I, garde un signe constant et n'est pas identiquement nulle sur I donc $\int_I p_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ c'est-à-dire $\langle p_n, 1\rangle \neq 0$. Cela contredit le fait que p_n est orthogonal à p_0.

- Donc p_n a au moins une racine dans l'intérieur de I et on peut reprendre les notations de l'énoncé.

  Avec ces notations, il existe un polynôme R, sans racine dans l'intérieur de I, tel que :

$$p_n(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - x_i)^{m_i} R(X) \quad \text{et donc} \quad p_n(X)q(X) = \prod_{i=1}^{k}(x - x_i)^{m_i+\varepsilon_i} R(x).$$

  Or les $m_i + \varepsilon_i$ sont des entiers pairs et par continuité R garde un signe constant sur l'intérieur de I et donc sur I.

  Par conséquent, la fonction $x \mapsto p_n(x)q(x)w(x)$ est continue, intégrable sur I, garde un signe constant sur I et n'est pas identiquement nulle sur I (sans quoi le polynôme p_nq qui est de degré $n+k$ aurait une infinité de racines donc serait nul).

  Il s'ensuit que $\int_I p_n(x)q(x)w(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ c'est-à-dire $\langle p_n, q\rangle \neq 0$.

  Mais avec la **remarque 2**, p_n est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc q est de degré supérieur ou égal à n.

  Or par construction le degré de q est au plus égal à k, donc $k \geqslant n$.

  La polynôme p_n admet donc au moins n racines distinctes $x_1, \dots, x_n$ dans l'intérieur de I.

  Vu que p_n est de degré n, on a donc établi que :

$$\boxed{p_n \text{ admet exactement } n \text{ racines distinctes (et simples) dans l'intérieur de } I.}$$

Q 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\pi_n(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.

Π_n n'est pas le polynôme nul donc

$$\int_I \pi_n(x)^2 w(x)\,\mathrm{d}x = \langle \pi_n, \pi_n\rangle > 0$$

Pourtant $I_n(\pi_n^2) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \pi_n^2(x_j) = 0$. Ainsi $e(\pi_n^2) \neq 0$ donc le degré de Π_n^2 qui vaut $2n+2$ est strictement supérieur à m.

$$\boxed{m < 2n+2 \text{ c'est-à-dire } m \leqslant 2n+1}$$

Q 20.
- Supposons que $m = 2n+1$.

  Posons $\pi_n(X) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Le degré du polynôme $\pi_n P$ est au plus égal à $2n+1$ donc

$$0 = e(P\pi_n) = \int_I P(x)\pi_n(x)w(x)\,\mathrm{d}x - \cancel{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j P(x_j)\pi_n(x_j)} = \langle P, \pi_n\rangle$$

  Donc π_n est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.

  Avec la **remarque 1**, il existe des réels $\alpha_0, \alpha_1 \dots, \alpha_{n+1}$ tels que $\pi_n = \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i p_i$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_i = \dfrac{\langle \pi_n, p_i\rangle}{\langle p_i, p_i\rangle} = 0$, donc $\pi_n = \alpha_{n+1}p_{n+1}$, ce qui prouve que les x_i sont les racines de p_{n+1}.

- Réciproquement, supposons que les x_i soient les racines de p_{n+1}.

  Soit $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Faisons la division euclidienne de P par p_{n+1} :

$$\text{il existe } Q \text{ et } R \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ tels que } P = p_{n+1}Q + R \quad \text{et } \deg(R) \leqslant n.$$

  Vu que e est linéaire :

$$e(P) = e(p_{n+1}Q) + e(R)$$

Or, en utilisant le fait que les x_j sont racines de p_{n+1}, puis que p_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$ (**remarque 2**) :

$$e(p_{n+1}Q) = \langle p_{n+1}, Q\rangle - \cancel{\sum_{j=0}^{n} \lambda_j p_{n+1}(x_j)}Q(x_j) = 0$$

De plus, la formule $I_n(f)$ est d'ordre $m \geqslant n$ et $\deg(R) \leqslant n$, donc $e(R) = 0$.

Finalement $e(P) = 0$ et ce pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$: autrement dit, la formule $I_n(f)$ est exacte sur $\mathbb{R}_{2n+1}[X]$, donc $m \geqslant 2n+1$. D'où $m = 2n+1$ avec **Q 19.**

$\boxed{\text{La formule } I_n(f) \text{ est d'ordre maximal (égal à } 2n+1\text{) si, et seulement si } x_0, x_1, \ldots, x_n \text{ sont les racines de } p_{n+1}}$

Q 21. Pour alléger, nous assimilerons pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme X^n à la fonction polynomiale $x \mapsto x^n$.

Commençons par observer que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \left\langle X^i, X^j \right\rangle = \int_{-1}^{1} t^{i+j}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j \text{ est impair} \\ \dfrac{2}{i+j+1} & \text{si } i+j \text{ est pair} \end{cases}$$

La famille obtenue en orthogonalisant la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ avec le procédé de Gram-Schmidt vérifie les propriétés (a),(b) et (c) du préambule de II-B, donc est égale à la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Orthogonalisons donc la famille $(1, X, X^2, X^3)$ avec le procédé de Gram-Schmidt :

- $p_0 = 1$
- $p_1 = X - \lambda p_0$ où λ est tel que $\langle p_1, p_0\rangle = 0$, donc $\lambda = 0$. D'où $p_1 = X$.
- $p_2 = X^2 - \lambda_1 p_1 - \lambda_0 p_0$ où λ_1 et λ_0 vérifient $\begin{cases} \left\langle X^2, p_1\right\rangle = \lambda_1 \langle p_1, p_1\rangle \\ \left\langle X^2, p_0\right\rangle = \lambda_0 \langle p_0, p_0\rangle \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} 0 = \lambda_1 \langle p_1, p_1\rangle \\ \dfrac{2}{3} = 2\lambda_0 \end{cases}$. D'où $p_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$.
- $p_3 = X^3 - \lambda_2 p_2 - \lambda_1 p_1 - \lambda_0 p_0$ où λ_1 et λ_0 vérifient $\begin{cases} \left\langle X^3, p_2\right\rangle = \lambda_2 \langle p_2, p_2\rangle \\ \left\langle X^3, p_1\right\rangle = \lambda_1 \langle p_1, p_1\rangle \\ \left\langle X^3, p_0\right\rangle = \lambda_0 \langle p_0, p_0\rangle \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} 0 = \lambda_2 \langle p_2, p_2\rangle \\ \dfrac{2}{5} = \lambda_1 \dfrac{2}{3} \\ 0 = \lambda_0 \langle p_0, p_0\rangle \end{cases}$. D'où $p_3 = X^3 - \dfrac{3}{5}p_1$.

$$\boxed{p_0 = 1,\ p_1 = X,\ p_2 = X^2 - \frac{1}{3} \text{ et } p_3 = X^3 - \frac{3}{5}X = X(X^2 - \frac{3}{5})}$$

NB : on vérifie avec soulagement que les racines de ces polynômes sont dans $]-1,1[$ *(cf question **Q18**)*

Q 22. Les racines de p_3 sont $x_0 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $x_1 = 0$ et $x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$.

Déterminons la base de Lagrange de $\mathbb{R}_2[X]$ associée aux points x_0, x_1, x_2 :

$$L_0 = \frac{(X-x_1)(X-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{X\left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\sqrt{\frac{3}{5}}\left(-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = \frac{5}{6}X\left(X - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

De même

$$L_1 = 1 - \frac{5}{3}X^2 \quad \text{et} \quad L_2 = \frac{5}{6}X\left(X + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

D'après **Q20.** une formule de quadrature d'ordre 5 est :

$$I_2(f) = \lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \ \text{ où, pour } j \in \{0,1,2\},\ \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(x)\,\mathrm{d}x.$$

On calcule donc :

$\lambda_0 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} t \left(t - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{5}{3} t^2 \right) \mathrm{d}t = \frac{8}{9}$ et $\lambda_2 = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} t \left(t + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{5}{9}$ En définitive :

$$\boxed{\text{Une formule de quadrature d'ordre 5 est : } I_2(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right)}$$

NB : après tous ces calculs, on est heureux de vérifier que $I_2(X) = I_2(X^3) = I_2(X^5) = 0$ et que $I_2(1) = 2 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t$, $I_2(X^2) = \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t$ et que $I_2(X^4) = \frac{2}{5} = \int_{-1}^{1} t^4 \,\mathrm{d}t$, donc que notre formule est bien exacte sur $\mathbb{R}_5[X]$.

Q 23. Soit $k \in \mathbb{N}$.

La fonction $f_k : x \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$f_k(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$ au voisinage de 1 donc f_k est intégrable au voisinage de 1.

De même $f_k(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$ au voisinage de -1 donc f_k est intégrable au voisinage de -1.

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } x \mapsto \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} \text{ est intégrable sur }]-1,1[.}$$

Q 24. Pour tout $x \in [-1,1]$, $Q_0(x) = 1$ et $Q_1(x) = x$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel θ,

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$$

Soit $x \in [-1,1]$. En prenant $\theta = \arccos(x)$, il vient :

$$\boxed{Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x).}$$

Q 25. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$\mathcal{P}_n$: « Q_n est une fonction polynomiale de degré n et de coefficient dominant 1 si $n = 0$ et 2^{n-1} si $n \geqslant 1$ »

- $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
- Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies :

  La relation de **Q24.** montre que pour tout $x \in [-1,1]$, $Q_{n+2}(x) = 2x(2^n x^{n+1} + R_n(x)) - Q_n(x)$ où R_n est une fonction polynomiale de degré $\leqslant n$. Donc Q_{n+2} est une fonction polynomiale de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1}. La propriété $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc prouvée et le résultat suit par récurrence :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, Q_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n \text{ et de coefficient dominant 1 si } n = 0 \text{ et } 2^{n-1} \text{ si } n \geqslant 1}$$

Q 26. Posons $q_0 = Q_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \frac{1}{2^{n-1}Q_n}$ et montrons que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés a), b) et c) de II-B, ce qui donnera le résultat voulu **par unicité** de la suite de polynômes orthogonaux associés à w.

a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme q_n est unitaire d'après **Q 25.**

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme q_n est de degré n d'après **Q 25.**

c) soient i et j dans $\mathbb{N}$ tels que $i \neq j$.

$$\langle q_i, q_j \rangle = \frac{1}{4^{n-1}} \langle Q_i, Q_j \rangle = \frac{1}{4^{n-1}} \int_{-1}^{1} \frac{Q_i(t)Q_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t.$$

L'application $x \mapsto \cos(x)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$ donc le changement de variable $x = \cos(t)$ fournit :

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_i(t)Q_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{0} Q_i(\cos(x))Q_j(\cos(x))\frac{-\sin(x)}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Or $x \mapsto \sin(x)$ est positive sur $[0,\pi]$ et $\forall x \in [0,\pi],\ \arccos(\cos(x)) = x$ donc $Q_i(\cos(x)) = \cos(ix)$, d'où :

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_i(t)Q_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\pi} \cos(ix)\cos(jx)\,\mathrm{d}x.$$

En linéarisant puis en observant que $i+j$ et $i-j$ sont des entiers non nuls, on obtient finalement :

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q_i(t)Q_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\pi} \cos((i+j)x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \cos((i-j)x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$$

donc la famille $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle .,.\rangle$.

On a prouvé :

$$\boxed{p_0 = Q_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{2^{n-1}}Q_n}$$

Q 27. Les points x_j, $0 \leqslant j \leqslant n$ de I tels que la formule $I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f(x_j)$ soit d'ordre maximal sont d'après **Q20.** les racines de p_{n+1}, donc de Q_{n+1}. Posons pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\boxed{x_k = \cos\left(\frac{2(n-k)+1}{2n+2}\pi\right).}$$

Vu que $x \mapsto \cos(x)$ est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, on a $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et

$$Q_{n+1}(x_k) = \cos\left((n+1)\frac{2(n-k)+1}{2n+2}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + (n-k)\pi\right) = 0,$$

$$\boxed{x_0,\dots,x_n \text{ sont les racines de } p_{n+1}.}$$

Q 28. Par hypothèse $R > 0$ donc on peut considérer un réel $r \in]0,R[$.

La série $\sum \alpha_n r^n$ est convergente, donc la suite $(\alpha_n r^n)$ tend vers 0, donc elle est bornée.

Il existe un réel M que l'on peut prendre supérieur ou égal à 1, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n r^n| \leqslant M.$$

Vu que l'on a pris $M \geqslant 1$, on a $M \leqslant M^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\alpha_n| \leqslant \frac{M^n}{r^n} = q^n \text{ en posant } q = \frac{M}{r}$$

Or $\alpha_0 = 1$ donc l'inégalité ci-dessus est encore vraie pour $n = 0$. Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un réel } q > 0 \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leqslant q^n.}$$

Q 29. Il existe $r \in]0, R[$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, $\dfrac{1}{S(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a donc, en faisant un produit de Cauchy de deux séries **absolument convergentes** :

$$1 = S(z) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \beta_k \alpha_{n-k} z^n.$$

En particulier, pour tout réel $x \in]-r, r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \beta_k \alpha_{n-k} x^n = 1$.

L'**unicité du développement en série entière** fournit alors :

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n} \beta_k \alpha_{n-k} = 0$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\beta_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \beta_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k} \beta_k}$$

Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{« } |\beta_n| \leqslant (2q)^n \text{ »}$$

- $\mathcal{P}_0$ est vraie car $\beta_0 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_0, \dots, \mathcal{P}_{n-1}$ soient vraies. Avec l'inégalité triangulaire :

$$|\beta_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{n-k} \beta_k| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} (2q)^k = q^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = q^n (2^n - 1) \leqslant (2q)^n$$

  d'où $\mathcal{P}_n$ et le résultat voulu par récurrence.

Q 30. Soit $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\beta_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \beta_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k} \beta_k$.

On vient de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}, |\beta_n| \leqslant (2q)^n$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $r \leqslant \dfrac{1}{2q}$. La suite $(\beta_n r^n)$ est donc bornée, par conséquent le rayon de convergence de la série entière $\sum \beta_n z^n$ qui est par définition $\sup\{r \geqslant 0 \mid \text{ la suite } (\beta_n r^n) \text{ est bornée } \}$ est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2q}$.

Prenons $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R, 1/(2q))$.

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, il vient comme en **Q29 .** :

$$S(z) \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \beta_k \alpha_{n-k} z^n = 1.$$

Donc la fonction $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Q 31. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, posons $S(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, donc pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)!}$. Cette égalité est encore vérifiée pour $z = 0$ donc :

$$\forall z \in \mathbb{C}, S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \quad \text{en posant, pour tout } n \in \mathbb{N}, \ \alpha_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$

D'après **Q30.** la fonction $\dfrac{1}{S}$ est développable en série entière au voisinage de 0 : il existe $r > 0$ une suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$,

$$\frac{1}{S(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n.$$

En particulier pour tout complexe z tel que $0 < |z| < r$, $\dfrac{z}{e^z - 1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n$ en posant $b_n = n!\beta_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons qu'une suite (c_n) vérifie : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |z| < r$.

Cette égalité est encore vraie pour $z = 0$. On a en particulier pour tout réel $t \in]-r, r[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n!} t^n$ donc par unicité du développement en série entière : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = b_n$.

$$\boxed{\text{Il existe } r > 0 \text{ et une unique suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de complexes tels que pour tout } z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < r \Rightarrow \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.}$$

Q 32. D'après **Q29.** , la suite (b_n) ainsi définie vérifie $b_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{b_n}{n!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-k} \frac{b_k}{k!} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k+1)!} \frac{b_k}{k!} = \frac{-1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k.$$

Il vient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0.$$

D'où le résultat voulu :

$$\boxed{b_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n \geqslant 2,\ \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0.}$$

Q 33. En utilisant le triangle de Pascal, on obtient : $\begin{cases} b_0 + 2b_1 = 0 \\ b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 0 \\ b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0 \\ b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 0 \end{cases}$ d'où l'on tire successivement :

$$\boxed{b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = 0 \text{ et } b_4 = -\frac{1}{30}}$$

Q 34. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x}{2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{2}\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Vu que $b_0 = 1$ et $b_1 = -1/2$, on a

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \dfrac{x}{2}\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1} = \dfrac{x\operatorname{ch}(x/2)}{2\operatorname{sh}(x/2)}$. On déduit facilement de cette dernière expression que f est paire. En particulier :

$$\forall x \in]-r, r[,\ 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{b_n}{n!} x^n.$$

On conclut avec l'unicité du développement en série entière :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ b_n = (-1)^n b_n, \text{ c'est-à-dire } \forall p \in \mathbb{N}^*,\ b_{2p+1} = 0.}$$

Q 35. Par définition, $B_0 = 1$, $B_1 = b_0X + b_1$, $B_2 = b_0X^2 + 2b_1X + b_2$ et $B_3 = b_0X^3 + 3b_1X^2 + 3b_2X + b_3$.

Les valeurs de b_1, b_2, b_3 et b_4 trouvées en **Q33.** fournissent alors immédiatement :

$$\boxed{B_0 = 1,\ B_1 = X - \frac{1}{2},\ B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6} \text{ et } B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X = X(X-1)(X - \frac{1}{2})}$$

Q 36. Soit $m \geqslant 2$. Avec **Q32.**, $B_m(1) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}b_k = \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}b_k + b_m = b_m$.

D'autre part, soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$B'_m = \sum_{k=0}^{m-1}(m-k)\binom{m}{k}b_kX^{m-k-1}$$

Or pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, $(m-k)\binom{m}{k} = (m-k)\binom{m}{m-k} = m\binom{m-1}{m-k-1} = m\binom{m-1}{k}$, donc

$$B'_m = m\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}b_kX^{m-1-k} = mB_{m-1}$$

$$\boxed{\forall m \geqslant 2, B_m(1) = b_m \text{ et } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ B'_m = mB_{m-1}}$$

Q 37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Les fonctions g et $x \mapsto B_1(x-k)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[k, k+1]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_k^{k+1} B_1(x - \lfloor x \rfloor)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} B_1(x-k)g'(x)\,\mathrm{d}x = [B_1(x-k)g(x)]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B'_1(x-k)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Or $B_1 = X - \frac{1}{2}$, donc

$$\int_k^{k+1} B_1(x - \lfloor x \rfloor)g'(x)\,\mathrm{d}x = B_1(1)g(k+1) - B_1(0)g(k) - \int_k^{k+1} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{g(k)+g(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

En sommant ces égalités pour k variant entre 0 et $n-1$, on obtient l'identité voulue avec la relation de Chasles :

$$\boxed{\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2} - \int_0^n B_1(x - \lfloor x \rfloor)g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

Q 38. Soit $m \geqslant 2$ fixé.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_p = \frac{(-1)^p}{p!}\int_0^n B_p(x - \lfloor x \rfloor)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de Chasles, puis la relation $B'_{p+1} = (p+1)B_p$ on obtient :

$$I_p = \frac{(-1)^p}{p!}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} B_p(x-k)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^p}{(p+1)!}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} B'_{p+1}(x-k)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Les fonctions $x \mapsto B_{p+1}(x-k)$ et $g^{(p)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[k, k+1]$, ce qui permet d'intégrer par parties :

$$\int_k^{k+1} B'_{p+1}(x-k)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x = \left[B_{p+1}(x-k)g^{(p)}(x)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} B_{p+1}(x-k)g^{(p+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or $p+1 \geqslant 2$, donc $B_{p+1}(1) = B_{p+1}(0) = b_{p+1}$ puis

$$\int_k^{k+1} B'_{p+1}(x-k)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x = b_{p+1}\left(g^{(p)}(k+1) - g^{(p)}(k)\right) - \int_k^{k+1} B_{p+1}(x - \lfloor x \rfloor)g^{(p+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En ajoutant ces égalités pour k variant entre 0 et $n-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} B'_{p+1}(x-k)g^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x &= b_{p+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(g^{(p)}(k+1)-g^{(p)}(k)\right)-\int_0^n B_{p+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p+1)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= b_{p+1}\left(g^{(p)}(n)-g^{(p)}(0)\right)-\int_0^n B_{p+1}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(p+1)}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \ I_p=(-1)^p\frac{b_{p+1}}{(p+1)!}\left(g^{(p)}(n)-g^{(p)}(0)\right)+I_{p+1}.$$

Mais avec la question Q37.,

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2}=I_1=\sum_{p=1}^{m-1}(I_p-I_{p+1})+I_m$$

Or avec la relation précédente,

$$\sum_{p=1}^{m-1}(I_p-I_{p+1})=\sum_{p=1}^{m-1}(-1)^p\frac{b_{p+1}}{(p+1)!}\left(g^{(p)}(n)-g^{(p)}(0)\right)=\sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}\frac{b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\right)$$

D'où la relation souhaitée :

$$\boxed{\forall m\geqslant 2,\ \int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2}+\sum_{p=2}^{m}(-1)^{p-1}\frac{b_p}{p!}\left(g^{(p-1)}(n)-g^{(p-1)}(0)\right)+\frac{(-1)^m}{m!}\int_0^n B_m(x-\lfloor x\rfloor)g^{(m)}(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Q 39. Soit $m\in\mathbb{N}^*$.Posons $\boxed{g(x)=f(a+xh)}$.

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,n]$, $g(0)=f(a)$, $g(n)=f(b)$ et pour tout $j\in\mathbb{N}$, $g^{(j)}(x)=h^jf^{(j)}(a+xh)$.

Appliquons ce qui précède à la fonction g et à l'entier $2m\geqslant 2$ et tenons compte du fait que $b_{2p+1}=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2}+\sum_{p=1}^{m}-\frac{b_{2p}}{(2p)!}\left(g^{(2p-1)}(n)-g^{(2p-1)}(0)\right)+\frac{1}{(2m)!}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(2m)}(x)\,\mathrm{d}x.\quad(\star)$$

On exprime les différents termes de $(\star)$ en fonction de f :

(i) Le changement de variable affine $t=a+xh$ fournit :

$$\int_0^n g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^n f(a+xh)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{h}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(ii)

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{g(k)+g(k+1)}{2}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}=\frac{1}{h}T_n(f).$$

(iii)

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{b_{2p}}{(2p)!}\left(g^{(2p-1)}(n)-g^{(2p-1)}(0)\right)=\sum_{p=1}^{m}\frac{b_{2p}}{(2p)!}h^{2p-1}\left(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\right)=\frac{1}{h}\sum_{p=1}^{m}\frac{(b-a)^{2p}b_{2p}}{n^{2p}(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b)-f^{(2p-1)}(a)\right)$$

(iv)

$$\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(2m)}(x)\,\mathrm{d}x=h^{2m}\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)f^{(2m)}(a+xh)\,\mathrm{d}x$$

et avec le changement de variable affine $t=a+xh$,

$$\int_0^n B_{2m}(x-\lfloor x\rfloor)g^{(2m)}(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{h}h^{2m}\int_a^b B_{2m}\left(\frac{t-a}{h}-\left\lfloor\frac{t-a}{h}\right\rfloor\right)f^{(2m)}(t)\,\mathrm{d}t$$

On multiplie l'égalité $(\star)$ par $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on remplace :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = T_n(f) - \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma_{2p}}{n^{2p}} + \rho_{2m}(n)$$

où $\gamma_{2p} = \dfrac{(b-a)^{2p} b_{2p}}{(2p)!}\left(f^{(2p-1)}(b) - f^{(2p-1)}(a)\right)$ et $\rho_{2m}(n) = \dfrac{h^{2m}}{(2m)!}\displaystyle\int_a^b B_{2m}\left(\frac{t-a}{h} - \left\lfloor \frac{t-a}{h} \right\rfloor\right) f^{(2m)}(t)\,\mathrm{d}t$.
On a la majoration :

$$|\rho_{2m}(n)| = \frac{(b-a)^{2m}}{(2m)!\; n^{2m}} \int_a^b \left|B_{2m}\left(\frac{t-a}{h} - \left\lfloor \frac{t-a}{h} \right\rfloor\right) f^{(2m)}(t)\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^{2m}}{(2m)!\; n^{2m}} \sup_{x\in[0,1]} |B_{2m}(x)| \int_a^b \left|f^{(2m)}(t)\right| \mathrm{d}t$$

D'où la majoration

$$\boxed{|\rho_{2m}(n)| \leqslant \frac{C_{2m}}{n^{2m}} \text{ en posant } C_{2m} = \frac{(b-a)^{2m}}{(2m)!} \sup_{x\in[0,1]} |B_{2m}(x)| \int_a^b \left|f^{(2m)}(t)\right| \mathrm{d}t}$$

—FIN—