Centrale PC 2020 Math 2 - Corrigé

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I.A - Premières propriétés

1. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Comme $x \mapsto e^{itx}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc sur $X(\Omega)$, et comme $X(\Omega)$ est fini, d'après le théorème de transfert (cas fini), e^{itX} a une espérance et
$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{k=1}^{r} e^{itx_k} P(X = x_k) = \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Comme $x \mapsto e^{itx}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc sur $X(\Omega)$, d'après le théorème de transfert (cas dénombrable), e^{itX} admet une espérance si et seulement si $\sum_{n\geq 0} e^{itx_n} P(X = x_n)$ converge absolument.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|e^{itx_n} P(X = x_n)| = P(X = x_n)$, donc $\sum_{n\geq 0} |e^{itx_n} P(X = x_n)| = \sum_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1), donc $\sum_{n\geq 0} e^{itx_n} P(X = x_n)$ converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert, e^{itX} admet une espérance et
$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(X = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n}.$$

3. • **Cas fini, avec les notations de la question 1**
$\phi_X : t \mapsto \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}$ est continue comme somme finie de fonctions continues.
• **Cas infini, avec les notations de la question 2**
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto a_n e^{itx_n}$. Alors :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$|f_n(t)| = |e^{itx_n} a_n| = |a_n|,$$
donc $\|f_n\|_\infty = |a_n| = P(X = x_n)$.
Par suite, comme $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1), $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'où, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $\phi_X = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\exp(itY) = \exp(it(aX + b)) = \exp(itaX)\exp(itb).$$
Or $\exp(itb) \in \mathbb{C}$, donc, par linéarité de l'espérance,
$$\phi_Y(t) = E(\exp(itY)) = E(\exp(itb)\exp(itaX)) = \exp(itb)E(\exp(itaX)) = \exp(itb)\phi_X(at).$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $-t \in \mathbb{R}$, donc $\phi_X(-t)$ existe et
$$\phi_X(-t) = E(e^{-itX}) = E\left(\overline{e^{itX}}\right) = \overline{E(e^{itX})} = \overline{\phi_X(t)}.$$
Comme ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in D_{\phi_X}$, $-x \in D_{\phi_X}$, donc
$$\begin{aligned} \phi_X \text{ paire} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(-t) = \phi_X(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \overline{\phi_X(t)} = \phi_X(t) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \phi_X(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I.B - Trois exemples

6. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, alors $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ est fini et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, donc, d'après la question 1,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{it}p)^k q^{n-k} \\ &= \left(pe^{it} + q\right)^n \quad \text{(d'après le binôme de Newton).}\end{aligned}$$

7. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ est infini et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = pq^{n-1}$, donc, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{itn} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} pe^{it} (qe^{it})^{n-1} \\ &= pe^{it} \frac{1}{1-qe^{it}} \quad \text{(série géométrique de raison } qe^{it} \text{ où } |qe^{it}| = q < 1) \\ &= \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}.\end{aligned}$$

8. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ est infini et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, donc, d'après la question 2,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X=n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^{it}) \quad \text{(série exponentielle)} \\ &= \exp(\lambda(e^{it}-1))\end{aligned}$$

I.C - Image de ϕ_X

9. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\phi_X(t)| &= \left| \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P(X=x) \right| \\ &\leq \sum_{x \in X(\Omega)} |e^{itx} P(X=x)| \quad \text{(inégalité triangulaire généralisée)} \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = 1,\end{aligned}$$

où toutes les sommes sont soit finies, soit convergentes.

10. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = a + \frac{2\pi}{t_0}k$, donc

$$\exp(it_0 x) = \exp\left(it_0\left(a + \frac{2\pi}{t_0}k\right)\right) = \exp(it_0 a + 2i\pi k) = \exp(it_0 a)\exp(2i\pi k) = \exp(it_0 a),$$

donc

$$\begin{aligned}\phi_X(t_0) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(it_0 x) P(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} \exp(it_0 a) P(X=x) \\ &= \exp(it_0 a) \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) = \exp(it_0 a),\end{aligned}$$

donc $|\phi_X(t_0)| = 1$.

11. Comme $|\phi_X(t_0)| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_X(t_0) = e^{i\theta}$.
Posons alors $a = \dfrac{\theta}{t_0} \Leftrightarrow \theta = at_0$ (possible car $t_0 \neq 0$).
On a alors

$$\phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{it_0 x_n} = \exp(it_0 a),$$

donc

$$\exp(-it_0 a)\phi_X(t_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i(t_0 x_n - t_0 a)) = 1.$$

12. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{x_n \in X(\Omega)} P(X = x_n) = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(i(t_0 x_n - t_0 a)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n,$$

soit, en regroupant tout le monde du même côté,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(1 - \exp(i(t_0 x_n - t_0 a))\right) = 0,$$

donc, en passant à la partie réelle, on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0.$$

13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et $1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a) \geq 0$, donc $a_n \left(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)\right) \geq 0$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} \neq 0$ et $x_{n_0} \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors

$$t_0 x_{n_0} - t_0 a \notin 2\pi\mathbb{Z}, \qquad \text{donc} \qquad \cos(t_0 x_n - t_0 a) < 1,$$

donc $a_{n_0}(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) > 0$.
On aurait alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = \underbrace{a_{n_0}(1 - \cos(t_0 x_{n_0} - t_0 a))}_{>0} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} \underbrace{a_n(1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a))}_{\geq 0} > 0,$$

ce qui est exclu d'après la question précédente.
D'où, par l'absurde, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ ou $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

14. On a donc

$$\begin{aligned} P\left(X \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}}^{+\infty} P(X = x_n) \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x_n \notin a + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}}}^{+\infty} 0 = 0, \end{aligned}$$

donc $P\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1 - P\left(X \notin a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

II. Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

II.A - Première méthode

Remarquons déjà que, pour tout $m \in \mathbb{R}$ et tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, $V_m(T)$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

II.A.1.

15. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}\right) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{2T} \int_{-T}^{T} e^{itx_k} e^{-imt} dt\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x_k - m)} dt\right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{ita} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{2T} \left[\dfrac{e^{ita}}{ia}\right]_{-T}^{T} & \text{si } a \neq 0 \\ \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} 1 dt & \text{si } a = 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{e^{iTa} - e^{-iTa}}{2iaT} & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases} = \operatorname{sinc}(Ta),$$

donc

$$V_m(T) = \sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(x_k - m)} dt\right) = \sum_{k=1}^{r} a_k \operatorname{sinc}(T(x_k - m)).$$

16. • Pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\overbrace{\sin x}^{\text{borné}}}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$.

• Si $m \in X(\Omega)$, alors il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $m = x_i$ et, pour tout $k \neq i$, $x_k \neq x_i$, donc $x_k \neq m$.
On a alors, pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{sinc}(T(x_k - m)) \\ &= a_i \mathrm{sinc}(0) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} a_k \underbrace{\mathrm{sinc}\,\underbrace{(T\,\overbrace{(x_k - m)}^{\neq 0})}_{\to \pm\infty}}_{\to 0} \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} a_i + 0 = a_i = P(X = x_i) = P(X = m). \end{aligned}$$

• Si $m \notin X(\Omega)$, alors $P(X = m) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $x_k \neq m$.
On a alors, pour tout $T > 0$,

$$V_m(T) = \sum_{k=1}^{r} a_k \underbrace{\mathrm{sinc}\,\underbrace{(T\,\overbrace{(x_k - m)}^{\neq 0})}_{\to \pm\infty}}_{\to 0} \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} 0 = P(X = m).$$

• Dans tous les cas, on a bien $V_m(T) \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} P(X = m)$.

II.A.2.

17. Pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$,

$$V_m(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n} \right) e^{-imt} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n e^{it(x_n - m)} \right) dt.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n : t \in [-T, T] \mapsto a_n e^{it(x_n - m)}$. Alors :
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est continue sur $[-T, T]$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [-T, T]$,

$$|h_n(t)| = |e^{itx_n} a_n| = |a_n|,$$

donc $\|h_n\|_\infty^{[-T,T]} = |a_n| = P(X = x_n)$.
Par suite, comme $\sum_{n \geq 0} \|h_n\|_\infty^{[-T,T]} = \sum_{n \geq 0} P(X = x_n)$ converge (et sa somme vaut 1), $\sum_{n \geq 0} h_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-T, T]$.

D'où, d'après le théorème d'interversion $\sum / \int$ en cas de convergence uniforme sur un segment,

$$\begin{aligned} V_m(T) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n e^{it(x_n - m)} \right) dt \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} a_n e^{it(x_n - m)} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2T} \int_{-T}^{T} a_n e^{it(x_n - m)} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{sinc}(T(x_n - m)) \quad \text{(même calcul qu'en question 15)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n \left(\frac{1}{T} \right). \end{aligned}$$

18. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $\mathbb{R}_+^* = D_{g_n}$ par opérations sur les fonctions usuelles.

• Si $x_n = m$, alors, pour tout $h > 0$, $g_n(h) = a_n \mathrm{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h} \right) = a_n \mathrm{sinc}(0) = a_n \underset{h \to 0}{\to} a_n$, donc g_n est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}_n(0) = a_n$.

• Si $x_n \neq m$, alors, pour tout $h > 0$, $g_n(h) = a_n \mathrm{sinc} \underbrace{\left(\dfrac{x_n - m}{h} \right)}_{\to \pm\infty} \underset{h \to 0}{\to} 0$, donc g_n est prolongeable par continuité en 0 en posant $\tilde{g}_n(0) = 0$.

• Dans tous les cas, la fonction g_n se prolonge bien en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

19. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{g}_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, si $t > 0$,

$$|\tilde{g}_n(t)| = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{x_n - m}{h}\right) P(X = x_n)\right| \leq P(X = x_n),$$

et, pour $t = 0$, l'inégalité reste valable vu le prolongement fait à la question 18.
On a donc $\|\tilde{g}_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leq P(X = x_n)$.
Or $\sum\limits_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et vaut 1), donc, par comparaison des séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geq 0} \|\tilde{g}_n\|_\infty^{\mathbb{R}_+}$ converge, donc $\sum\limits_{n\geq 0} \tilde{g}_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}_+$.

D'où, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, $G = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

20. Pour tout $T > 0$,

$$\begin{aligned}
V_m(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{(d'après la question 17)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{(car } g_n \text{ et } \tilde{g}_n \text{ coïncident sur } \mathbb{R}_+^*)\\
&= G\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{(par définition de } G)\\
&\underset{T\to+\infty}{\to} G(0) \quad \text{(par continuité de } G \text{ sur } \mathbb{R}_+, \text{ donc en } 0)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0)
\end{aligned}$$

Or $\tilde{g}_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq x_n \\ a_n & \text{si } m = x_n \end{cases}$ (d'après la question 18), donc,

— Si $m \in X(\Omega)$, alors il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $m = x_i$ et, pour tout $n \neq i$, $x_n \neq x_i$, donc $x_n \neq m$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to+\infty} V_m(T) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n(0)\\
&= \tilde{g}_i(0) + \sum_{\substack{n=0\\ n\neq i}}^{+\infty} \underbrace{\tilde{g}_n(0)}_{=0}\\
&= a_i = P(X = x_i) = P(X = m).
\end{aligned}$$

— Si $m \notin X(\Omega)$, alors $P(X = m) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq m$.
On a alors

$$\lim_{T\to+\infty} V_m(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\tilde{g}_n(0)}_{=0} = 0 = P(X = m).$$

Dans tous les cas, on a bien $V_m(T) \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} P(X = m)$.

II.A.3. Application

21. Notons, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $T > 0$, $W_m(T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_Y(t) e^{-imt} dt$.
Alors, d'après ce qui précède (appliqué à la variable Y, qu'elle soit finie (question 16) ou infinie (question 20)), on a

$$\lim_{T\to+\infty} W_m(T) = P(Y = m).$$

Or, $\phi_X = \phi_Y$, donc, pour tout $T > 0$,

$$W_m(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi_Y(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \phi_X(t) e^{-imt} dt = m) = V_m(T),$$

donc

$$\lim_{T\to+\infty} W_m(T) = \lim_{T\to+\infty} V_m(T) = P(X = m)$$

(que X soit finie ou infinie d'après les questions 16 et 20).
D'où, par unicité de la limite, on a $P(X = m) = P(Y = m)$.
Ceci étant valable pour tout $m \in \mathbb{R}$, X et Y ont la même loi.

II.B - Deuxième méthode

22. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, comme $ita \in \mathbb{C}$ et $itb \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}
K_{a,b}(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{2it} &= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itb)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ita)^n}{n!}}{2it} \\
&= \frac{1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(itb)^n}{n!} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ita)^n}{n!}}{2it} \\
&= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(itb)^n - (iat)^n}{n!}}{2it} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(itb)^n - (iat)^n}{n!(2it)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(ib)^{n-1} - a(ia)^{n-1}}{2 \times n!} t^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(ib)^n - a(ia)^n}{2 \times (n+1)!} t^n
\end{aligned}$$

et cette égalité est encora valable pour $t = 0$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(ib)^n - a(ia)^n}{2 \times (n+1)!} 0^n = \frac{b(ib)^0 - a(ia)^0}{2 \times 1!} = \frac{b-a}{2} = K_{a,b}(0).$$

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $K_{a,b}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b(ib)^n - a(ia)^n}{2 \times (n+1)!} t^n$, donc $K_{a,b}$ est développable en séries entières sur $\mathbb{R}$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

23. • Si $N = 0$, $F_N : x \mapsto 0$, donc $F_n'(x) = 0 = 0 \times \operatorname{sinc}(0x)$, donc l'égalité est vérifiée.
   • Soit à présent $N \in \mathbb{N}^*$ et posons $f : (x,t) \in \mathbb{R} \times [-N, N] \mapsto K_{a,x}(t)$.
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t) = K_{a,x}(t)$ est continue sur le segment $[-N, N]$ (d'après la question précédente), donc intégrable sur $[-N, N]$.
   — Pour tout $t \in [-N, N] \smallsetminus \{0\}$, $x \mapsto f(x,t) = K_{a,x}(t) = \frac{e^{itx} - e^{ita}}{2it}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, (pour tout $t \in [-N, N] \smallsetminus \{0\}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{e^{itx}}{2}.$$

   Pour $t = 0$, $x \mapsto f(x,0) = K_{a,x}(0) = \frac{x-a}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \frac{1}{2}.$$

   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} e^{itx}/2 & \text{si } t \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

   et cette fonction est continue par morceaux sur $[-N, N]$ (car $\lim_{t \to 0^+} e^{itx}/2$ et $\lim_{t \to 0^-} e^{itx}/2$ sont finies (et valent $1/2$).
   en fait, on a même la continuité, mais ce n'est pas utile ici.
   — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [-N, N]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| = \frac{1}{2} = \varphi(t) \quad \text{(valable aussi pour } t = 0\text{)},$$

   où φ est intégrable sur $[-N, N]$ (car constante sur un intervalle borné).

   D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F_N : x \mapsto \int_{-N}^{N} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_N'(x) = \int_{-N}^{N} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{itx}}{2ix} \right]_{-N}^{N} & \text{si } x \neq 0 \\ N & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} N \frac{\sin(Nx)}{Nx} & \text{si } x \neq 0 \\ N\operatorname{sinc}(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} = N\operatorname{sinc}(Nx).$$

24. $K_{a,a}$ est la fonction nulle, donc $F_n(a) = 0$.
   Par suite, comme F_N' est continue sur $[a, b]$, on a

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = F_n(b) = F_n(b) - F_n(a) = \int_a^b F_n'(x)dx = \int_a^b N\operatorname{sinc}(Nx)dx.$$

Posons alors le changement de variable $s = Nx$. ce changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-N, N]$ et on a $dx = \dfrac{1}{N}ds$, donc

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = \int_a^b N\mathrm{sinc}(Nx)dx = \int_{Na}^{Nb} \mathrm{sinc}(s)ds.$$

25. • La fonction sinc est continue sur $[0,1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{sinc}(s)ds$ existe.

• Posons $u'(s) = \sin(s)$, $u(s) = -\cos(s)$, $v(s) = \dfrac{1}{s}$, $v'(s) = -\dfrac{1}{s^2}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

$u(s)v(s) = -\dfrac{\overbrace{\cos(s)}^{\text{borné}}}{s} \underset{s\to+\infty}{\to} 0.$

D'où, par intégration par partie, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)ds = \int_1^{+\infty} u'(s)v(s)ds$ est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(s)v'(s)ds = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(s)}{s^2}ds$.

Or, pour tout $s \geq 1$, $\dfrac{\cos(s)}{s^2} = \dfrac{O(1)}{s^2} = \underset{s\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)$, et, comme $s \mapsto \dfrac{1}{s^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), par comparaison, $s \mapsto \dfrac{\cos(s)}{s^2}$ est aussi intégrable sur $[1, +\infty[$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(s)}{s^2}ds$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)ds$ converge.

• On a donc bien établi la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)ds$.

26. • la fonction sinc est paire, donc on a, par parité,

$$\int_{-\infty}^{0} \mathrm{sinc}(s)ds = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)ds = \pi.$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on a :

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = \int_{Na}^{Nb} \mathrm{sinc}(s)ds \underset{\text{Chasles}}{=} \int_0^{Nb} \mathrm{sinc(s)}ds - \int_0^{Na} \mathrm{sinc}(s)ds.$$

Or, si $c > 0$,

$$\int_0^{Nc} \mathrm{sinc(s)}ds \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} \mathrm{sinc}(s)ds = \frac{\pi}{2} \quad \text{(par définition d'une intégrale convergente)},$$

si $c = 0$,

$$\int_0^{Nc} \mathrm{sinc(s)}ds = \int_0^{0} \mathrm{sinc}(s)ds = 0 \underset{N\to+\infty}{\to} 0,$$

et, si $c < 0$,

$$\int_0^{Nc} \mathrm{sinc(s)}ds \underset{N\to+\infty}{\to} \int_0^{-\infty} \mathrm{sinc}(s)ds = -\frac{\pi}{2},$$

donc, en distinguant les différents cas possibles (on a $b > a$), on a

$$\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)dt = \int_0^{Nb} \mathrm{sinc(s)}ds - \int_0^{Na} \mathrm{sinc}(s)ds \underset{N\to+\infty}{\to} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \text{ et } b > 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \text{ et } b < 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \pi/2 & \text{si } a < 0 \text{ et } b = 0 \\ \pi & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \end{cases}.$$

27. Reprenons les notations de la question 1.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k e^{-itx_k}\right) K_{a,b}(t)dt \\ &= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} e^{-itx_k} K_{a,b}(t)dt\right) \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) \quad \text{(par définition de } K\text{)} \end{aligned}$$

Or $a - x_k \neq 0$ et $b - x_k \neq 0$, donc, d'après la question précédente,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt \underset{N\to+\infty}{\to} \begin{cases} 1 & \text{si } a - x_k < 0 \text{ et } b - x_k > 0 \Leftrightarrow a < x_k < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} \phi_X(-t)K_{a,b}(t)dt &= \sum_{k=1}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) \quad \text{(par définition de } K) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\in]a,b[}}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\notin]a,b[}}^{r} a_k \left(\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{N} K_{a-x_k,b-x_k}(t)dt\right) \\
&\underset{N\to+\infty}{\to} \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\in]a,b[}}^{r} a_k \times 1 + \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\notin]a,b[}}^{r} a_k \times 0 \quad \text{(combinaison linéaire (finie) de limites finies)} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ x_k\in]a,b[}}^{r} P(X = x_k) = P(a < X < b).
\end{aligned}$$

III. Régularité de ϕ_X

III.A -

28. • Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq k$.
— Si $|x| \leq 1$, alors $|x|^j \leq 1 \leq 1 + |x|^k$.
— Si $|x| \geq 1$, alors $|x|^j \leq |x|^k \leq 1 + |x|^k$.
On a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^j \leq 1 + |x|^k$
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^j P(X = x_n)| = |x_n|^j P(X = x_n) \leq P(X = x_n) + |x_n|^k P(X = x_n)$.
Or $\sum_{n\geq 0} P(X = x_n)$ converge (et vaut 1) et $\sum_{n\geq 0} |x_n|^k P(X = x_n)$ converge d'après le théorème de transfert (car X a un moment d'ordre k), donc $\sum_{n\geq 0} P(X = x_n) + |x_n|^k P(X = x_n)$ converge (comme somme de séries convergentes), et, finalement, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} |x_n^j P(X = x_n)|$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} x_n^j P(X = x_n)$ converge absolument, donc, d'après le théorème de transfert (cas infini), X^j a une espérance, donc X a un moment d'ordre j.

29. D'après la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(X = x_n).$$

Posons à nouveau, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{itx_n} P(X = x_n)$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ par opérations sur les fonctions usuelles et

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n^{(j)}(t) = (ix_n)^j e^{itx_n} P(X = x_n).$$

— $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement (car uniformément d'après la question 3) sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f_n^{(j)}(t)| = |ix_n|^j.|e^{itx_n}|.P(X = x_n) = |x_n|^j P(X = x_n),$$

donc $\|f_n^{(j)}\|_\infty = |x_n|^j P(X = x_n)$.
D'où $\sum_{n\geq 0} \|f_n^{(j)}\|_\infty = \sum_{n\geq 0} |x_n|^j P(X = x_n)$ converge (d'après la question précédente), donc $\sum_{n\geq 0} f_n^{(j)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

D'où, d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$,

$$\phi_X^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ix_n)^j e^{itx_n} P(X = x_n).$$

30. Par suite,

$$\phi_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ix_n)^k e^{i0x_n} P(X = x_n) = i^k \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k P(X = x_n) = i^k E(X^k),$$

donc $E(X^k) = i^{-k}\phi_X^{(k)}(0) = (-i)^k \phi_X^{(k)}(0)$.

III.B -

31. Comme ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc en 0, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 sous la forme :

$$\phi_X(t) = \phi_X(0) + t\phi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\phi_X''(0) + o(t^2).$$

Par suite, comme $h \to 0$, on a, pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{4h^2}\left(2\phi_X(0) - \left(\phi_X(0) + 2h\phi_X'(0) + \frac{4h^2}{2}\phi_X''(0) + o(h^2)\right) - \left(\phi_X(0) - 2h\phi_X'(0) + \frac{4h^2}{2}\phi_X''(0) + o(h^2)\right)\right) \\ &= \frac{1}{4h^2}(-4h^2\phi_X''(0) + o(h^2)) \\ &= -\phi_X''(0) + o(1) \underset{h\to 0}{\to} -\phi_X''(0). \end{aligned}$$

32. A l'aide de la définition de ϕ_X, on a, pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{4h^2}\left(2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{i0} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{2ihx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-2ihx_n}\right) \\ &= \frac{1}{4h^2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(2 - e^{2ihx_n} - e^{-2ihx_n}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{a_n}{4h^2}(e^{ihx_n} - e^{-ihx_n})^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{h^2}\left(\frac{e^{ihx_n} - e^{-ihx_n}}{2i}\right)^2 \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}. \end{aligned}$$

33. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} = a_n\frac{(hx_n)^2 + o(h^2)}{h^2} = a_n x_n^2 + o(1) \underset{h\to 0}{\to} a_n x_n^2.$$

• Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$$

comme somme finie de limites finies.
Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n\dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \geq 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} = f(h),$$

donc, en passant à la limite quand $h \to 0$ dans cette inégalité (les deux limites existent), on a :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0}\sum_{n=0}^{N} a_n\frac{\sin^2(hx_n)}{h^2} \leq \lim_{h\to 0} f(h) = \phi_X''(0).$$

• La suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée. De plus, elle est croissante (car $a_n x_n^2 \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), donc elle converge.
Par suite, $\sum_{n\geq 0} a_n x_n^2$ converge, donc converge absolument (série à termes positifs), donc, d'après le théorème de transfert, X^2 admet une espérance, donc X admet un moment d'ordre 2.

III.C -

34. Si $\alpha = 0$, alors on a $E(X^{2k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^{2k}P(X = x_n) = 0$, donc, comme une somme de terme positifs est nul si et seulement si chaque terme est nul, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n^{2k}P(X = x_n) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n = 0 \text{ ou } P(X = x_n) = 0.$$

Or $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(X = n_0) \neq 0$, donc on a $x_{n_0} = 0$.
Comme les x_n sont deux à deux distincts, on a alors $x_n \neq 0$ pour tout $n \neq n_0$, donc $P(X = x_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$.
En ré-utilisant $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n) = 1$, on obtient alors $P(X = x_{n_0}) = 1$.
La variable X est donc une variable quasi certaine égale à $x_{n_0} = 0$.
Et, par suite, dans ce cas, X admet des moments de tout ordre, et ils sont tous nuls.

35. • Une telle variable Y existe car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y = x_n) \geq 0$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^{2k} = \frac{1}{\alpha} E(X^{2k}) = 1 \quad \text{(par le théorème de transfert).}$$

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_Y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} P(Y = x_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itx_n} \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha} = \frac{(-1)^k}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (ix_n)^{2k} e^{itx_n} a_n = \frac{(-1)^k}{\alpha} \phi_X^{(2k)}(t)$$

où la dernière égalité est justifiée par la question 30, dont les hypothèses sont vérifées.

On a donc $\phi_Y = \dfrac{(-1)^k}{\alpha} \phi_X^{(2k)}$.

• Or ϕ_X est supposée de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$, donc $\phi_X^{(2k)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

36. Comme ϕ_Y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, Y admet un moment d'ordre 2 (d'après la question 33).

D'où, d'après le théorème de transfert, la série $\sum_{n \geq 0} x_n^2 P(Y = x_n) = \dfrac{1}{\alpha} \sum_{n \geq 0} a_n x_n^{2k+2}$ converge absolument, donc, toujours d'après le théorème de transfert, X^{2k+2} a une espérance, donc X a un moment d'ordre $2k + 2$.

37. Montrons le résultat par récurrence sur k, en notant HR_k la propriété à démontrer.
Initialisation : Pour $k = 1$, si ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$, alors X a un moment d'ordre 2 d'après la question 33.
On a donc bien HR_1.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons HR_k vérifiée.
Supposons alors ϕ_X de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$.
Comme ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$, X admet un moment d'ordre $2k$ d'après HR_k.
On a donc ϕ_X de classe $\mathcal{C}^{2k+2}$ et X admet un moment d'ordre $2k$, donc, d'après les question 34 et 36 (cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$), X admet un moment d'ordre $2k + 2$. On a bien HR_{k+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, si ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ sur $\mathbb{R}$, alors X admet un mement d'ordre $2k$.

IV. Développement en série entière de ϕ_X

IV.A -

38. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{ita} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(ita)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(ia)^n}{n!} t^n$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Par suite, $\phi_X : t \mapsto \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions développables en série entière et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \sum_{k=1}^{r} a_k e^{itx_k} \\
&= \sum_{k=1}^{r} a_k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix_k)^n}{n!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{r} a_k \frac{(ix_k)^n}{n!} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(it)^n}{n!} \sum_{k=1}^{r} a_k x_k^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n).
\end{aligned}$$

IV.B -

39. La fonction $\psi : t \mapsto e^{it}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in \mathbb{R}, \psi^{(k)}(t) = i^k e^{it}.$$

D'où, d'après le théorème de Taylor-reste intégral appliqué à ψ entre 0 et y, on a :

$$\begin{aligned}
e^{iy} = \psi(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} y^k + \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!} + \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!} \psi^{(n+1)}(t) dt.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $y \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!}\right| &= \left|\int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&\leq \int_0^y \left|\frac{(y-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)\right| dt \quad \text{(inégalité triangulaire généralisée avec } y \geq 0) \\
&= \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!}|\psi^{(n+1)}(t)|dt = \int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!}dt \quad (\text{car } |\psi^{(n+1)}(t)| = |i^{n+1}e^{it}| = 1) \\
&= \left[-\frac{(y-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^y = \frac{y^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

et, pour tout $y < 0$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{iy} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iy)^k}{k!}\right| &= \left|\int_0^y \frac{(y-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)dt\right| \\
&\leq \int_y^0 \left|\frac{(y-t)^n}{n!}\psi^{(n+1)}(t)\right| dt \quad \text{(inégalité triangulaire généralisée avec } y < 0) \\
&= \int_y^0 \frac{(t-y)^n}{n!}|\psi^{(n+1)}(t)|dt = \int_y^0 \frac{(t-y)^n}{n!}dt \quad (\text{car } |\psi^{(n+1)}(t)| = |i^{n+1}e^{it}| = 1) \\
&= \left[\frac{(t-y)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_y^0 = \frac{(-y)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

On a donc bien, dans tous les cas, l'inégalité souhaitée.

40. Pour tout $t \in \left[-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right]$, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left|\phi_X(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!}E(X^k)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^k\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{itx_n} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} x_n^k\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(e^{itx_n} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(itx_n)^k}{k!}\right)\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left|e^{itx_n} - \sum_{k=0}^{K} \frac{(itx_n)^k}{k!}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{|tx_n|^{K+1}}{(K+1)!}
\end{aligned}$$

où cette série, qui vaut $\frac{t^{K+1}}{(K+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n|x_n|^{K+1}$ converge (car X a un moment d'ordre $K+1$), et cette convergence justifie a posteriori la convergence de la série de la ligne précédente.

On a donc

$$\begin{aligned}
\left|\phi_X(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!}E(X^k)\right| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{|tx_n|^{K+1}}{(K+1)!} \\
&= \frac{|t|^{K+1}}{(K+1)!}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n|x_n|^{K+1} \\
&= \frac{|t|^{K+1}}{(K+1)!}E(|X|^{K+1}) \quad \text{(d'après le théorème de transfert)} \\
&= O\left(\frac{R^{K+1}}{e^{K+1}(K+1)!}\frac{(K+1)^{K+1}}{R^{K+1}}\right) \quad (\text{par hypothèse sur } E(|X|^n) \text{ et } t) \\
&= O\left(\frac{(K+1)^{K+1}}{e^{K+1}\left(\frac{K+1}{e}\right)^{K+1}\sqrt{2\pi(K+1)}}\right) \quad \text{(formule de Stirling)} \\
&= O\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi(K+1)}}\right) \underset{K\to+\infty}{\to} 0,
\end{aligned}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{K\to+\infty} \phi_X(t) - \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!}E(X^k) = 0,$$

donc $\lim_{K \to +\infty} \sum_{k=0}^{K} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) = \phi_X(t)$, donc $\sum_{k \geq 0} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) = \phi_X(t).$$