# CENTRALE-SUPÉLEC MATH 2 PC 2019
# PROPOSITION de CORRIGÉ

## I. Introduction d'une fonction auxiliaire

### I.A - Dérivées successives

**Q 1.** En organisant les calculs de façon à préparer la question suivante, on obtient, pour $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{1+\sin x}{(\cos x)^2}\ , \quad f''(x) = \frac{\sin^2 x + 2\ \sin x + 1}{(\cos x)^3}\ , \quad f^{(3)}(x) = \frac{\sin^3 x + 4\ \sin^2 x + 5\ \sin x + 2}{(\cos x)^4}\ .$$

**Q 2.** La fonction $f$ est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I$. La propriété à démontrer (existence d'un polynôme $P_n$) est vraie au rang 0 avec $P_0 = X + 1$ et, si elle est vraie à un certain rang $n \in \mathbb{N}$, alors

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1-\sin^2 x)\ P_n'(\sin x) + (n+1)\ \sin(x)\ P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}} = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}\ ,$$

où $P_{n+1}$ est le polynôme $P_{n+1} = (n+1)X\ P_n + (1-X^2)\ P_n'$.

On a alors $P_0 = P_1 = X+1$, $P_2 = X^2+2X+1$ et $P_3 = X^3+4X^2+5X+2$.

Notons que l'unicité du polynôme $P_n$ est immédiate par l'argument classique: un polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

**Q 3.** La propriété à démontrer est vraie pour $n = 1$ (initialisation) et, si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on peut écrire $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{N}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

Par la relation de récurrence obtenue en **Q 2.**, on calcule alors

$$\begin{aligned}
P_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n}(n+1)a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(n+1)a_{k-1}X^k + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k - \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)a_{k-1}X^k \\
&= X^{n+1} + 2a_{n-1}X^n + \sum_{k=1}^{n-1}\Big((n-k+2)a_{k-1} + (k+1)a_{k+1}\Big)\ X^k + a_1\ .
\end{aligned}$$

Le polynôme $P_{n+1}$ ainsi écrit est bien unitaire de degré $n+1$, à coefficients entiers naturels, ce qui achève la récurrence.

***Remarque.*** Il en résulte que $P_n(t)$ est positif pour $t \in \mathbb{R}_+$, cela sera utile en **Q 6.**

**Q 4.** Pour $x \in I$, on a

$$1 + f(x)^2 = \frac{\cos^2 x + 1 + 2\ \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{2 + 2\sin x}{\cos^2 x} = 2\ f'(x)\ .$$

**Q 5.** On constate $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ donc $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la formule de Leibniz,

$$2\ f^{(n+1)} = (2\ f')^{(n)} = (f^2+1)^{(n)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}\ .$$

En évaluant en 0, cela donne $2\ \alpha_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

### I.B - Développement en série entière

**Q 6.** Comme $\alpha_n = f^{(n)}(0)$, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a

$$f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n=\int_0^x\frac{(x-t)^N\,f^{(N+1)}(t)}{N!}\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, $f^{(N+1)}(t)=\dfrac{P_{N+1}(\sin t)}{(\cos t)^{N+2}}$ est positif car $\sin t\geq 0$ pour $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et d'après la remarque faite à la fin de **Q 3.** L'intégrande étant positif sur $[0,x]$ avec $x\geq 0$, le reste intégral est positif, d'où l'inégalité

$$\forall N\in\mathbb{N}\quad\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\qquad\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha_n}{n!}x^n\leq f(x)\ .$$

**Q 7.** Pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\alpha_n}{n!}x^n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées d'après **Q 6.**, elle est donc convergente. La série entière considérée étant convergente pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, son rayon de convergence $R$ est au moins égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

**Q 8.** Pour $x\in I$, on écrit, en faisant le "carré de Cauchy" d'une série entière dans son intervalle de convergence,

$$\begin{aligned}
1+g(x)^2 &= 1+\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{n!}x^n\right)^2\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}\,\frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_k\alpha_{n-k}\right)x^n\\
&= 1+\alpha_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha_{n+1}}{n!}\,x^n \qquad\qquad \text{d'après } \mathbf{Q\ 5.}\\
&= 2\alpha_1+2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\alpha_n\,x^{n-1}}{(n-1)!}\ =\ 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha_n\,x^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= 2\,g'(x)\ .
\end{aligned}$$

**Q 9.** Pour $x\in I$, posons $\varphi(x)=\mathrm{Arctan}\big(f(x)\big)$ et $\psi(x)=\mathrm{Arctan}\big(g(x)\big)$. Les fonctions $\varphi$ et $\psi$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ avec $\varphi'=\dfrac{f'}{1+f^2}$ et $\psi'=\dfrac{g'}{1+g^2}$. Les questions **Q 4.** et **Q 8.** montrent que $\varphi'=\psi'=\dfrac{1}{2}$, donc $\varphi=\psi+C$ sur $I$, où $C$ est une constante. Comme $\varphi(0)=\psi(0)=\dfrac{\pi}{4}$, la constante est nulle et $\varphi=\psi$. Comme $f(x)=\tan\big(\varphi(x)\big)$ et $g(x)=\tan\big(\psi(x)\big)$, on déduit $f=g$ sur $I$.

***Remarque.*** De ce calcul, on déduit aussi que $\varphi(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, et donc qu'une autre expression de $f$ sur $I$ est $f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$, ce qui n'est pas forcément intéressant...

**Q 10.** On observe que $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} g(x) = \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$. Si on avait $R > \dfrac{\pi}{2}$, la fonction $g$, somme de la série entière, serait prolongeable en une fonction continue sur $]-R, R[$, ce qui contredirait la présence d'une limite infinie en $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$. Avec **Q 7.**, on conclut $R = \dfrac{\pi}{2}$.

**I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière**

**Q 11.** Par analyse-synthèse (l'intervalle $I$ est symétrique par rapport à 0):

**Analyse**: si $p$ et $i$ existent, alors pour tout $x$, on a $h(x) = p(x) + i(x)$ et $h(-x) = p(x) - i(x)$, on en déduit que, nécessairement, $p(x) = \dfrac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i(x) = \dfrac{h(x) - h(-x)}{2}$, d'où l'unicité de $p$ et $i$ ;

**Synthèse**: les fonctions $p$ et $i$ dont les expressions ont été obtenues dans la partie analyse sont respectivement paire et impaire, et leur somme est $h$, d'où l'existence de $p$ et $i$.

**Q 12.** On décompose $f$ en sa partie paire et sa partie impaire:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} + \tan(x) \ .$$

On fait de même pour $g$:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!}\, x^{2n} \ + \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \ .$$

La question **Q 11.** permet d'identifier les parties paires et impaires, d'où les égalités demandées.

**Q 13.** Par le cours sur les séries entières, on a, pour tout $k$ entier naturel,

$$t^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad t^{(2k+1)}(0) = \alpha_{2k+1} \ .$$

**Q 14.** On a $\forall x \in I \quad (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$, soit $t' = 1 + t^2$.

**Q 15.** Pour $x \in I$, on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} &= 1 + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} \right)^2 \\
&= 1 + x^2 \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!}\, (x^2)^n \right)^2 \\
&= 1 + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{\alpha_{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} \right) (x^2)^n \\
&\qquad \textit{par un produit de Cauchy} \\
&= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} \alpha_{2k+1}\, \alpha_{2n-2k+1} \right) x^{2(n+1)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \alpha_{2k+1}\, \alpha_{2n-2k-1} \right) x^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\, \alpha_{2n-2k+1} \right) x^{2n}
\end{aligned}$$

(en terminant le calcul par un décalage d'indice dans la somme extérieure, puis un dans la somme intérieure). Par unicité du développement en série entière, on peut identifier les coefficients, ce qui donne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation

$$\alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\, \alpha_{2n-2k+1} \ .$$

## II. Équivalent de $\alpha_{2n+1}$

### II.A - La fonction zéta

**Q 16.** Posons $u_n(s) = \dfrac{1}{n^s}$ pour $s \in ]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Chaque fonction $u_n$ est continue et, si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans $]1, +\infty[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall s \in S \qquad \big|u_n(s)\big| = u_n(s) \leq u_n(a) \ .$$

Comme la série majorante $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(a)$ est convergente (série de Riemann avec $a > 1$), on a prouvé la convergence normale sur $S$ (donc sur tout segment inclus dans $]1, +\infty[$) de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$. La fonction somme $\zeta$ est alors continue sur $]1, +\infty[$.

**Q 17.** Si on fixe $s \in ]1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^s}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\forall n \geq 2 \qquad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \ .$$

En sommant ces inégalités pour $n$ de 2 à l'infini (les séries et les intégrales étant toutes convergentes), par la relation de Chasles, on obtient

$$\frac{1}{2^{s-1}(s-1)} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1} \ .$$

En ajoutant le premier terme 1, on a l'encadrement

$$\forall s \in ]1, +\infty[ \qquad 1 + \frac{1}{2^{s-1}(s-1)} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1} \ .$$

Comme $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{s-1}(s-1)}\right) = \lim_{s\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{s-1}\right)$, par encadrement, on a $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

**Q 18.** En séparant les termes d'indices pairs et impairs, on a, pour $s > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \frac{1}{2^s}\, \zeta(s) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \ .$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\, \zeta(s)$, avec $C(s) = 1 - \dfrac{1}{2^s}$.

### II.B - Une formule pour la fonction cosinus

**Q 19.** Pour $n \in [\![2, +\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 2x\, I_n(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2x\ \cos(2xt)\big)\,(\cos t)^n\ \mathrm{d}t \\ &= \Big[\sin(2xt)\,(\cos t)^n\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2xt)\ \sin(t)\,(\cos t)^{n-1}\ \mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Le terme entre crochets étant nul, une deuxième intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 4x^2\, I_n(x) &= n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2x\ \sin(2xt)\big)\,\big(\sin(t)\,(\cos t)^{n-1}\big)\ \mathrm{d}t \\ &= n \Bigg( \Big[-\cos(2xt)\ \sin(t)\,(\cos t)^{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2xt)\,\big((\cos t)^n - (n-1)\,(\sin t)^2\,(\cos t)^{n-2}\big)\ \mathrm{d}t \Bigg)\ . \end{aligned}$$

Le terme entre crochets étant de nouveau nul, avec $\sin^2 = 1 - \cos^2$, on a ainsi la relation

$$4x^2\, I_n(x) = n\, I_n(x) - n(n-1)\,\big(I_{n-2}(x) - I_n(x)\big)\ ,$$

que l'on peut réécrire $(n^2 - 4x^2)\, I_n(x) = n(n-1)\, I_{n-2}(x)$, ou encore

$$\Big(1 - \frac{4x^2}{n^2}\Big)\, I_n(x) = \frac{n-1}{n}\, I_{n-2}(x)\ .$$

Évaluée pour $x = 0$, cette relation donne $\dfrac{n-1}{n} = \dfrac{I_n(0)}{I_{n-2}(0)}$. En réinjectant, on obtient

$$\Big(1 - \frac{4x^2}{n^2}\Big)\, \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}\ .$$

**Q 20.** En considérant (convention standard) qu'un produit de zéro facteur vaut 1, la relation à démontrer est vraie pour tout $n$ entier naturel.

En effet, elle est vraie pour $n = 0$ puisque $I_0(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{2x}$ pour $x \neq 0$ et $I_0(0) = \dfrac{\pi}{2}$, donc $\pi x\, \dfrac{I_0(x)}{I_0(0)} = \sin(\pi x)$.

De la deuxième relation prouvée en **Q 19.**, on déduit par ailleurs que le second membre de l'égalité à démontrer en **Q 20.** ne dépend pas de l'entier naturel $n$. Cette égalité étant vraie pour $n = 0$, elle est alors vraie pour tout $n$.

**Q 21.** *Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'égalité à démontrer est une erreur d'énoncé.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in ]0,1[$, on peut écrire

$$\cos(\pi x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\,\sin(\pi x)} = \frac{1}{2}\, \frac{2\pi x\, \dfrac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \Big(1 - \frac{4x^2}{k^2}\Big)}{\pi x\, \dfrac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{4x^2}{(2k)^2}\Big)}\ ,$$

soit, en examinant ce qu'il reste après simplification des deux produits,

$$\cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right) .$$

**II.C - Un autre développement de tangente**

**Q 22.** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(2t-1)^s}$ étant décroissante sur $[1, +\infty[$, on a, comme en **Q 17.**,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s} = \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s} = \frac{1}{2(s-1)\,(2n-1)^{s-1}} .$$

**Q 23.** Fixons un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$, posons $u_p(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2^{2p+1} x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$.

Notons que $u_p(x) = 2^{2p+1} x^{2p-1} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^{2p}}$, donc $u_p(x)$ est, à un facteur près, le reste d'ordre $n$ d'une série convergente (car $2p > 1$), et $u_p(x)$ existe bien. La majoration de **Q 22.**, suivie d'une majoration assez brutale mais ici suffisante, donne ensuite

$$0 \leq u_p(x) \leq \frac{2^{2p}\, x^{2p-1}}{(2p-1)\,(2n-1)^{2p-1}} \leq 2^{2p}\, x^{2p-1} = 2\,(2x)^{2p-1} ,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison $(2x)^2 = 4x^2$, avec ici $|4x^2| < 1$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{p\geq 1} u_p(x)$ converge, ce qui garantit la bonne définition de la fonction $S_n$ sur $J$.

**Q 24.** En reprenant de façon un peu plus fine les majorations, on a en fait, pour $x \in J \setminus \{0\}$,

$$0 \leq u_p(x) \leq \frac{2^{2p}\, x^{2p-1}}{(2p-1)\,(2n-1)^{2p-1}} \leq 2 \left(\frac{2x}{2n-1}\right)^{2p-1} = \frac{2n-1}{x} \left(\frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right)^{p} ,$$

donc $\quad 0 \leq S_n(x) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} u_p(x) \leq \frac{2n-1}{x} \frac{\dfrac{4x^2}{(2n-1)^2}}{1 - \dfrac{4x^2}{(2n-1)^2}} = \frac{\dfrac{4x}{2n-1}}{1 - \dfrac{4x^2}{(2n-1)^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par encadrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = 0$, le résultat étant trivial pour $x = 0$.

**Q 25.** Les facteurs de **Q 21.** étant tous strictement positifs, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$,

$$\ln\big(\cos(\pi x)\big) = \ln\big(I_{4n}(2x)\big) - \ln\big(I_{2n}(x)\big) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2}\right) + K_n ,$$

où $K_n = \ln\big(I_{2n}(0)\big) - \ln\big(I_{4n}(0)\big)$ est une constante. En dérivant, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$,

$$\pi\ \tan(\pi x) = -\frac{2\, I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{8x}{(2k-1)^2}}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}} .$$

***Remarque.*** Les fonctions $I_{2n}$ sont dérivables sur $J$ (et même sur $\mathbb{R}$, on le retrouvera en **Q 28.**) par exemple puisque $I_0(x) = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{sinc}(\pi x)$ où sinc est la fonction sinus cardinal, et ensuite la relation obtenue en **Q 19.** permet de le prouver par récurrence sur $n$.

**Q 26.** On reconnaît, dans le dernier terme de la somme précédente, une somme géométrique: pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in J \setminus \{0\}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{8x}{(2k-1)^2}}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \frac{2}{x}\sum_{k=1}^{n} \frac{\dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}}{1 - \dfrac{4x^2}{(2k-1)^2}} = \frac{2}{x}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\Big)^p\Big) = \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+1}\,x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\Big)\,,$$

l'interversion des sommations étant permise puisque l'une des deux sommes est finie. En ajoutant $S_n(x)$ aux deux membres de la relation de **Q 25.**, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\pi\,\tan(\pi x) + S_n(x) &= -\frac{2\,I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}\,x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}\Big)\\
&= -\frac{2\,I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(2^{2p+1}\,x^{2p-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2p}}\Big)\\
&= -\frac{2\,I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty}\Big(2^{2p+1}\,x^{2p-1}\Big(1-\frac{1}{2^{2p}}\Big)\,\zeta(2p)\Big)
\end{aligned}$$

d'après **Q 18.** Finalement, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in J$, cela donne

$$\pi\,\tan(\pi x) + S_n(x) = -\frac{2\,I'_{4n}(2x)}{I_{4n}(2x)} + \frac{I'_{2n}(x)}{I_{2n}(x)} + \sum_{p=1}^{+\infty} 2\,(2^{2p}-1)\,\zeta(2p)\,x^{2p-1}\,.$$

**Q 27.** L'étude de la fonction $t \mapsto \sin(t) - t\,\cos(t)$ est laissée au vaillant lecteur.

**Q 28.** En appliquant le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, on montre que, pour tout $n$, la fonction $I_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $I'_n(x) = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\,\sin(2xt)\,(\cos t)^n\mathrm{d}t$. En effet, en posant $v(x,t) = \cos(2xt)\,(\cos t)^n$, l'application partielle $x \mapsto v(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -2t\,\sin(2xt)\,(\cos t)^n$, et donc la domination $\left|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\right| \le 2t$ avec $t \mapsto 2t$ intégrable sur $\Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]$. Avec l'inégalité de **Q 27.**, on obtient, pour $x \in [0,1]$ (cette condition garantit que le facteur $\sin(2xt)$ reste positif),

$$0 \le -I'_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,(t\,\cos t)\,\sin(2xt)\,(\cos t)^{n-1}\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,\sin(t)\,\sin(2xt)\,(\cos t)^{n-1}\mathrm{d}t = J_n(x)\,,$$

puis une intégration par parties donne

$$J_n(x) \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(2\,\sin(t)\,(\cos t)^{n-1}\Big)\,\Big(\sin(2xt)\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{2}{n}\,(\cos t)^n\,\sin(2xt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4x}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2xt)\,(\cos t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4x}{n}\,I_n(x)\ ,
\end{aligned}
$$

et on a bien la majoration demandée. Donc $\left|\dfrac{I_n'(x)}{I_n(x)}\right| \leq \dfrac{4x}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n'(x)}{I_n(x)} = 0$.

**Q 29.** Soit $x \in J$. En faisant tendre $n$ vers l'infini dans **Q 26.**, grâce à **Q 24.** et **Q 28.**, il vient

$$\pi\,\tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2\,(2^{2p}-1)\,\zeta(2p)\,x^{2p-1}\ .$$

### II.D - Un équivalent de $\alpha_{2n+1}$

**Q 30.** Par un changement de variable linéaire (remplacer $\pi x$ par $x$), et par imparité, on déduit que la fonction tangente est développable en série entière sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec

$$\tan(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} 2\,(2^{2p}-1)\,\zeta(2p)\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2p-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\,(2^{2n+2}-1)\,\zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}}\,x^{2n+1}\ .$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier avec celui obtenu en **Q 12.**, d'où l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \alpha_{2n+1} = \frac{2\,(2^{2n+2}-1)\,(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\,\zeta(2n+2)\ .$$

**Q 31.** Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$, on a $\displaystyle\alpha_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\times\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+2}\times(2n+1)!$ *On peut remplacer la factorielle par un équivalent avec la formule de Stirling, mais je ne pense pas que cela présente d'intérêt.*

## III. Permutations alternantes

### III.A - Dénombrement des permutations alternantes

**Q 32.** Pour $n = 2$, il y a une seule permutation alternante montante (**PAM**) qui est $(1, 2) = \mathrm{Id}$.

Pour $n = 3$, il y en a deux qui sont $(1, 3, 2)$ et $(2, 3, 1)$.

Pour $n = 4$, il y en a cinq qui sont $(1, 3, 2, 4)$, $(1, 4, 2, 3)$, $(2, 3, 1, 4)$, $(2, 4, 1, 3)$ et $(3, 4, 1, 2)$.

Ainsi, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 2$ et $\beta_4 = 5$.

**Q 33.** L'application $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \mapsto (n+1-\alpha_1, \cdots, n+1-\alpha_n)$ réalise une bijection entre les **PAM** de $[\![1, n]\!]$ et les **PAD** (permutations alternantes descendantes).

**Q 34.** Notons $A = \{m_1, \cdots, m_k\}$ avec $m_1 < m_2 < \cdots < m_k$, autrement dit cette écriture est l'énumération strictement croissante de la partie $A$ (la numérotation commençant à 1). Alors l'application $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \mapsto (m_{\alpha_1}, \cdots, m_{\alpha_k})$, conservant l'ordre des $k$-uplets, réalise une bijection entre l'ensemble des **PAM** de l'intervalle $[\![1, k]\!]$ et l'ensemble des listes alternantes montantes d'éléments de $A$. Le nombre de telles listes est alors $\beta_k$.

**Q 35.** Il y a autant de **PAD** que de **PAM** de $[\![1, n+1]\!]$, donc le nombre de permutations alternantes est $2\beta_{n+1}$. On a donc $\displaystyle 2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\gamma_{n+1}^{(k)}$ en notant $\gamma_{n+1}^{(k)}$ le nombre de permutations alternantes de $[\![1, n+1]\!]$ dans lesquelles l'élément $n+1$ se trouve en $k+1$-ème position. Notons qu'une telle permutation s'écrit $\big(\sigma(1), \cdots, \sigma(k), n+1, \sigma(k+2), \cdots, \sigma(n+1)\big)$ et, comme $\sigma(k) < n+1 > \sigma(k+2)$, elle est nécessairement montante si $k$ est impair et descendante si $k$ est pair. Pour construire une telle permutation alternante, une fois choisi l'entier $k$, il reste à choisir une partie $A$ de cardinal $k$ de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ -*il y a pour cela* $\binom{n}{k}$ *choix possibles*-, puis à choisir une liste alternante des éléments de $A$, notée $\big(\sigma(1), \cdots, \sigma(k)\big)$, qui soit montante si $k$ est impair et descendante si $k$ est pair -*dans les deux cas, il y a* $\beta_k$ *possibilités*- et enfin une liste alternante (nécessairement montante) notée $\big(\sigma(k+2), \cdots, \sigma(n+1)\big)$ des éléments de $[\![1, n]\!] \setminus A$ -*il y a* $\beta_{n-k}$ *choix possibles*. Au final, $\gamma_{n+1}^{(k)} = \binom{n}{k} \beta_k\, \beta_{n-k}$, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2\, \beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta_k\, \beta_{n-k}\ .$$

**Q 36.** Les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ vérifient la même initialisation (rangs 0 et 1) et la même relation de récurrence forte d'après **Q 5.**, donc $\beta_n = \alpha_n$ pour tout $n$.

**III.B - Permutations aléatoires**

**Q 37.** On a $p_n = \dfrac{\beta_n}{\mathrm{Card}(\Omega_n)} = \dfrac{\beta_n}{n!} = \dfrac{\alpha_n}{n!}$. On sait (**Q 7.**) que la série entière $\sum \dfrac{\alpha_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence strictement plus grand que 1, la série numérique $\sum \dfrac{\alpha_n}{n!}$ est donc convergente, donc son terme général tend vers 0, ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$.

De **Q 30.**, on tire $p_{2n+1} = \dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{2\,(2^{2n+2}-1)}{\pi^{2n+2}}\, \zeta(2n+2) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2 \times \left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{2n+2}$.

**Q 38.** L'événement $\{M_n > i\}$ est constitué des permutations $\sigma \in \Omega_n$ telles que la liste $\big(\sigma(1), \cdots, \sigma(i)\big)$ soit alternante montante. Dénombrons ces permutations: on doit choisir l'ensemble $\big\{\sigma(1), \cdots, \sigma(i)\big\}$ -*il y a pour cela* $\binom{n}{i}$ *choix possibles*- , puis choisir une liste alternante montante des éléments de cet ensemble -*il y a* $\beta_i$ *possibilités*- et enfin choisir une permutation quelconque des $n-i$ autres éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ -*il y en a* $(n-i)!$. Ainsi, $\mathrm{Card}\big(\{M_n > i\}\big) = \binom{n}{i} \beta_i\, (n-i)!$ Enfin,

$$\mathbb{P}(M_n > i) = \frac{\mathrm{Card}\big(\{M_n > i\}\big)}{\mathrm{Card}(\Omega_n)} = \binom{n}{i} \beta_i\, \frac{(n-i)!}{n!} = \frac{\beta_i}{i!} = p_i\ .$$

**Q 39.** On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_n) &= \sum_{k=2}^{n+1} k\, \mathbb{P}(M_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k \left(\mathbb{P}(M_n > k-1) - \mathbb{P}(M_n > k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, p_k - \sum_{k=2}^{n} k\, p_k = 2\, p_1 + \sum_{k=2}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} p_k\ .
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(M_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!} = g(1) = f(1) = \frac{\sin(1)+1}{\cos(1)}$.