Corrigé Centrale PC 2: Fonctions tests et distributions

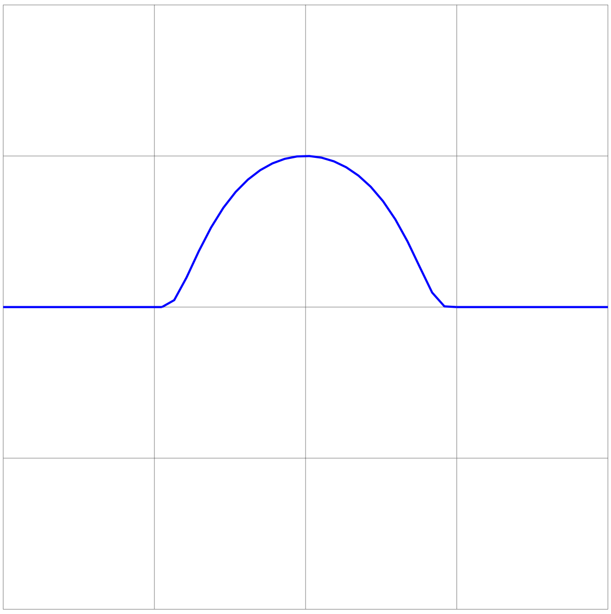
Gilbert Primet
Relu par Denis Lepelletier

20 juin 2015

I.Étude de nouveaux espaces fonctionnels

1.A.1)

a) φ est définie sur $\mathbb{R}$, paire, et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. De plus $\lim \varphi_{1^+} = 0 = \varphi(0)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-x^2}{1-x^2} = -\infty$ donc par composition $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi(x) = 0$. φ est donc continue en 1 et par parité φ est continue en -1. φ est donc décroissante sur $[0, 1]$ de 1 à 0, et constante nulle sur $[1, +\infty[$. De même φ est constante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $-1, 0]$ de 0 à 1.



b)

c) φ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et :

$$\forall x \in]-1, 1[\ \varphi'(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \phi(x),\ \forall x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\ \varphi'(x) = 0.$$

On a $\varphi'(x) \sim_{x \to 1^-} e\left(\frac{-2}{2(1-x^2)^2} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)\right)$. En posant $u = \frac{-1}{1-x^2}$, on a $\lim\limits_{x \to 1^-} u = -\infty$ et $\lim_{u \to -\infty} u e^{-u} = 0$. Donc par composition des limites, on obtient $\lim\limits_{x \to 1^-} \varphi'(x) = 0$. De plus, $\lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = 0$. Comme f est continue en 1, on obtient que f est dérivable en 1 et $f'(1) = 0$. Par parité φ' est dérivable en -1 et $\varphi'(-1) = 0$.
Montrons par récurrence que φ est dérivable à tout ordre n sur $]-1, 1[$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in]-1, 1[, \varphi^{(n)} x = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{2n}} \varphi(x)$ C'est vrai à l'ordre 0 avec $P_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie à l'ordre n. Alors, d'après les théorèmes usuels, φ est dérivable à l'ordre $n+1$ sur $]-1, 1[$ et

$$\forall x \in]-1, 1[\varphi^{n+1}(x) = \frac{((4n-2) - 4nx^2) x P_n(x) + (1-x^2)^2 P_n'(x)}{(1-x^2)^{2(n+1)}} \varphi(x)$$

Si l'on pose $P_{n+1}(x) = [(4n-2)-4nx^2)xP_n(x)+(1-x^2)^2P_n'(x)$, alors P_{n+1} est un polynôme,ce qui termine la récurrence.
φ est donc de classe C^∞ sur $]-1,1[$. De même φ est de classe $C^{+\infty}$ sur $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$ et ses dérivées successives sont nulles sur ces intervalles.
On pose alors $u = \frac{-1}{1-x^2}$ et on a $\lim\limits_{x\to 1^-} u = -\infty$ et $\lim_{u\to-\infty} u^n e^{-u} = 0$, ce qui prouve que

$$\lim_{x\to 1^-} \varphi^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x\to -1^+} \varphi^{(n)}(x).$$

On a évidemment

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi^{(n)}(x) = 0 = \lim_{x\to -1^-} \varphi^{(n)}(x),$$

et donc , en appliquant successivement le théorème de la limite de la dérivée , aux dérivées successives de φ, on voit que φ est dérivable à tout ordre n en -1 et 1, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \varphi^{(n)}(1) = \varphi^{(n)}(-1) = 0,$$

et que $\varphi^{(n)}$ est continue en 1 et -1. Donc φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d) $\mathcal{D}$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il contient la fonction nulle. De plus, si φ_1 et φ_2 sont des éléments de $\mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors , il existe des réels a,b,c,d (avec $a<b$ et $c<d$) tels que φ_1 est nulle en dehors de $[a,b]$ et φ_2 est nulle en dehors de $[c,d]$. On en déduit alors que $\lambda\varphi_1+\varphi_2$ est nulle en de hors de $[\min(a,c),\max(b,d)]$. De plus $\lambda\varphi_1+\varphi_2$ est de classe C^∞. Donc $\lambda\varphi_1+\varphi_2 \in \mathcal{D}$. Par conséquent, $\mathcal{D}$ est un sous-espace-vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et donc c'est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Cet espace vectoriel est non réduit à $\{0\}$ puisqu'il contient la fonction φ précédente.

I.A.2) Si $f \in \mathcal{D}$, alors , f est de classe C^∞ et il existe deux réels a et b avec $a<b$ telle que f est nulle en de hors de $[a,b]$. On en déduit que f' est de classe C^∞ et nulle en dehors de $[a,b]$ donc $f' \in \mathcal{D}$.

I.A.3)

a) $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = \int_{-1}^1 \varphi(t)dt$. φ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[-1,1]$, donc

$$\int_{-1}^1 \varphi(t)dt > 0$$

.

b) Comme φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, θ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} \theta = \frac{\int_{\mathbb{R}}\varphi}{\int_{\mathbb{R}}\varphi} = 1$. L'application $u \mapsto nu$ est une bijection de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sur lui-même, donc en posant $x = nu$, $dx = ndu$, on obtient $\int_{\mathbb{R}} \theta(x)dx = 1 = \int_{\mathbb{R}} n\theta(nu)du$ et la deuxième intégrale converge. On obtient donc bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$$

.

I.A.4) ρ_n est nulle en dehors de l'intervalle $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$, donc pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)\rho_n(x-t)$ est définie, continue par morceaux, et nulle pour $x-t > \frac{1}{n}$ ou $x-t < -\frac{1}{n}$, soit $t > x+\frac{1}{n}$ ou $t < x-\frac{1}{n}$, donc nulle en dehors de l'intervalle $[x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}]$. Donc $t \mapsto f(t)\rho_n(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $f*\rho_n(x)$ est donc bien défini pour tout x réel.
Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(t)\rho_n(x-t)$ est de classe C^∞ et :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \frac{\partial^k(f(t)\rho_n(x-t))}{\partial x^k}(x,t) = f(t)\rho_n^{(k)}(x-t).$$

De plus, la fonction $\rho_n^{(k)}$, nulle en dehors d'un segment où elle est continue, est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit $M_k = \sup_{\mathbb{R}} |\rho_n^{(k)}|$. Si $x \in [a,b]$, alors $t\rho_n^{(k)}(x-t)$ est nulle en dehors de $[a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$.

Or f, continue par morceaux, est bornée sur $[a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}]$. En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k(f(t)\rho_n(x-t))}{\partial x^k}(x,t)$ est nulle en dehors d'un certain intervalle indépendant de $x \in [a,b]$, où elle est bornée indépendamment de x. On a donc à la fois l'intégrabilité de cette fonction et une condition de domination sur tout segment $[a,b]$. $f * \rho_n$ est donc dérivable à tout ordre (donc de classe C^∞ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (f*\rho_n)^{(k)} = f*(\rho_n^{(k)}).$$

1.A.5

a) $I_n(x) = \int_{-1}^{1} \rho_n(x-t)dt = \int_{-1}^{1} n\theta(n(x-t))dt = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_{-1}^{1} n\varphi(n(x-t))dt$ On pose $u = n(x-t)$, $du = -ndt$ et

$$I_n(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_{n(x-1)}^{n(x+1)} \varphi(u)du$$

En particulier, pour tout x réel, on a $I_n(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_n(-x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\rho_n(x+t)dt$. On pose alors $u = g(t) = -t$ et l'on obtient $I_n(-x) = \int_{\mathbb{R}} f(-u)\rho_n(x-u)du = \int_{\mathbb{R}} f(u)\rho_n(u-x)du = I_n(x)$. (Compte-tenu de la parité de f et de ρ_n).

b) Si $x+\frac{1}{n} \leqslant -1$ ou $x-\frac{1}{n} \geqslant 1$, c'est à dire $x \geqslant 1+\frac{1}{n}$ ou $x \leqslant -1-\frac{1}{n}$ alors $I_n(x) = 0$. D'autre part I_n est de classe C^∞. On a donc bien $I_n \in \mathcal{D}$. Pour tout x réel, $I_n'(x) = \frac{n}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt}(\varphi(n(x+1)) - \varphi(n(x-1))$ d'après l'expression trouvée en a). (Intégrale fonction des ses bornes.) Il faut donc étudier les signe de $(\varphi(n(x+1)) - \varphi(n(x-1)) = u(x)$. (Puisque φ est paire. Cette expression est *impaire* en x, il suffit donc d'étudier le signe sur $[0,+\infty[$. Pour $x \geqslant 0$, on a $n(x+1) > 1$ donc $\varphi(n(x+1)) = 0$. Donc $u(x) = -\varphi(n(x-1)) = -\varphi(n(1-x))$. Si $x \in [0, 1-\frac{1}{n}]$, alors $n(1-x) \geqslant 1$ donc $\varphi n(1-x) = 0$. Si $x \in]1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]$, alors $n(1-\frac{1}{n}) \in]-1,1[$, donc $u(x) < 0$. Enfin, si $x \geqslant 1+\frac{1}{n}$, alors $n(x-1) \geqslant 1$ donc $u(x) = 0$.
En conclusion pour $n > 1$, la fonction $I_n(x)$ est constante sur $[0, 1-\frac{1}{n}]$ (égale à $I_n(0) = 1$ et $[1-\frac{1}{n}, +\infty[$ (égale à 0 puisque $I_n \in \mathcal{D}$) et décroissante strictement sur $[1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}]$
Compte-tenu de la parité de I, on obtient alors les variations sur $\mathbb{R}$.

c)

d) On a pour tout x réel :$I_n(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_{n(x-1)}^{n(x+1)} \varphi(u)du$ On sait que φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Il y a donc plusieurs cas possibles :

1. Si $x > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} n(x-1) = \lim\limits_{n\to\infty} n(x+1) = +\infty$. Donc $\lim_{n\to\infty} I_n(x) = 0$.
2. Si $x = 1$, alors $\lim_{n\to\infty} I_n(x) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt} \int_0^{+\infty} \varphi(u)du = \frac{1}{2}$
3. Si $x \in [0,1[$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} n(x-1) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} n(x+1) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x) = 1$.
4. Comme $I_n(x)$ est paire, on a donc finalement :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1,1[\lim_{n\to\infty} I_n(x) = 1 \\ \forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\lim_{n\to\infty} I_n(x) = 0 \\ \lim_{n\to\infty} I_n(1) = \lim_{n\to\infty} I_n(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

J et I sont donc égales sauf en 1 ou -1. (Remarque : en tout point réel x, $J(x)$ vaut la demi-somme des limités à droite et à gauche de I. On dit que J est la régularisée de I.)

e) Les fonctions I_n sont continues sur $\mathbb{R}$ alors que la limite n'est pas continue. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

I.B-Fonctions C^∞ à décroissance rapide Remarque : $\mathcal{S}$ est l'espace de Schwartz, mathématicien français « inventeur »des distributions. Il a formalisé un procédé utilisé auparavant en physique sans justification théorique solide.

I.B.1) $\mathcal{S}$ est inclus dans l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans lui-même qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

L'application nulle appartient à $\mathcal{S}$ donc $\mathcal{S}$ est non vide.
Soient $(f,g)\in\mathcal{S}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $\lambda f+g$ est de classe C^∞ et $\forall n\in\mathbb{N}\ (\lambda f+g)^{(n)}=\lambda f^{(n)}+g^{(n)}$. On a donc :

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2\ \lambda\lim_{x\to+\infty}x^m f^{(n)}(x)+\lim_{x\to+\infty}x^m g^{(n)}(x)=0=\lim_{x\to+\infty}(\lambda f+g)^{(n)}(x)$$

On a un résultat analogue en $-\infty$, donc $(\lambda f+g)\in\mathcal{S}$.
$\mathcal{S}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel.

1.B.2) Pour toute fonction f de classe C^∞ et tout entier naturel p, $f^{(p)}$ est de classe C^∞ et pour tout entier naturel n, $(f^{(p)})^{(n)}=f^{(n+p)}$. Les conditions aux limites sont donc encore réalisées pour $f^{(p)}$, et donc $\forall f\in\mathcal{S}$, $\forall p\in\mathbb{N}\ f^{(p)}\in\mathcal{S}$.

I.B.3) On sait que toute fonction polynôme est de classe C^∞, et ses dérivées sont des fonctions polynômes. D'autre part, par linéarité de la limite, on , pour toute fonction polynôme P et tout $f\in\mathcal{S}$:

$$\forall n\in\mathbb{N}\lim_{x\to-\infty}P(x)f^{(n)}(x)=\lim_{x\to+\infty}P(x)f^{(n)}(x)=0$$

D'après la formule de Leibniz :$\forall n\in\mathbb{N}\ (Pf)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^{(k)}f^{(n-k)}$ On a alors

$$\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\forall k\in[|0,n|]\lim_{x\to+\infty}x^mP^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)(x)=\lim_{x\to-\infty}x^mP^{(k)}(x)f^{(n-k)}(x)=0$$

puisque $x^mP^{(k)}(x)$ est une fonction polynôme.
Donc $Pf\in\mathcal{S}$.

II Espace des distributions sur $\mathcal{D}$

II.A.1) Il existe des réels c et d $(c<d)$ tels que φ soit nulle à l'extérieur du segment $[c,d]$. $f\varphi$ est à support compact et continue par morceaux, donc l'intégrale existe bien et vaut $\int_c^d f(x)\varphi(x)dx$. Par linéarité de l'intégrale (on considère ici l'intégrale initiale de $-\infty$ à $+\infty$, T_f est linéaire. Enfin, si (φ_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ qui converge sur $\mathcal{D}$ vers φ, alors il existe un réel a tel que : $\forall x\in\mathbb{R},|x|>a\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N}\varphi_n(x)=0$ On a alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ T_f(\varphi_n)=\int_{-a}^a f(x)\varphi_n(x)dx$. Or f est bornée sur $[-a,a]$. Donc

$$\forall x\in[-a,a]|f(x)\varphi_n(x)-f(x)\varphi(x)|\leqslant\|f\|_\infty|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\|f\|_\infty\|\varphi_n-\varphi\|_\infty.$$

($\|f\|_\infty$ étant prise sur $[-a,a]$.) Donc, toujours sur $[-a,a]$:

$$\|\varphi_nf-\varphi f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\|\varphi_n-\varphi\|_\infty.$$

Et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ |T(\varphi_n)-T(\varphi)|\leqslant 2a\|f\|_\infty\|\varphi_n-\varphi\|_\infty.$$

Par conséquent, d'après l'hypothèse de convergence uniforme de φ_n vers φ :

$$\lim_{n\to\infty}T(\varphi_n)=T(\varphi).$$

Ceci prouve que T est une distribution.

II.A.2) Il s'agit probablement de T_U. Il suffit de montrer que U est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Or U est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et a une limite à droite (1) et à gauche (0) en 0. Donc U est bien continue par morceaux sur tout segment donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc T_U est une distribution (appelée distribution de Heaviside.)

II.A.3) a)Si (φ_n) est une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ convergeant dans $\mathcal{D}$ vers φ, alors elle converge uniformément, donc simplement vers la fonction φ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(a)=\varphi(a)$$

Donc δ_a est une distribution.
b)On a $\forall t\in\mathbb{R}\varphi_n(t)=\varphi(n(t-a))$. Donc φ_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support compact. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}^*\varphi_n(a)=1$. S'il existe une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $T_f=\delta_a$, alors en particulier :

$$\forall n\in\mathbb{N}\int_{\mathbb{R}}f(t)\varphi_n(t)dt=1.$$

On a donc

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}}f(t)\varphi(n(t-a))dt=1$$

Or φ est bornée sur $\mathbb{R}$ et $\|\varphi\|_\infty=1$. De plus, f est bornée sur $[a-1,a+1]$ et $[a-\frac{1}{n},a+\frac{1}{n}]\subset[a-1,a+1]$ Donc

$$\left|\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}}f(t)\varphi(n(t-a))dt\right|\leqslant\frac{2\|f_{|[-a,a]}\|_\infty}{n}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}}f(t)\varphi(n(t-a))dt=0.$$

On obtient donc une contradiction et δ_a n'est pas une distribution régulière.

II.B Dérivation des distributions sur $\mathcal{D}$

II.B.1) Si $\varphi\in\mathcal{D}$, alors $\varphi'\in\mathcal{D}$ donc T' est bien définie.

$$\forall(\varphi_1,\varphi_2)\in\mathcal{D}^2\forall\lambda\in\mathbb{R}T'(\lambda\varphi_1+\varphi_2)=-T(\lambda\varphi_1+\varphi_2)=-\lambda T(\varphi_1)-T(\varphi_2)=\lambda T'(\varphi_1)+T'(\varphi_2)$$

Donc T' est linéaire. Soit une suite (φ_n) d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que : $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi$. On a alors, d'après la définition : $(\varphi_n)'\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi'$.. En effet, si une fonction dérivable est nulle en dehors de $[-a,a]$, il en est de même de sa dérivée, et pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite de fonctions $((\varphi_n)')^{(k)}$ converge uniformément vers $(\varphi')^{(k)}$ puisque $((\varphi_n)')^{(k)}=\varphi_n^{(k+1)}$. On a donc $T(\varphi_n')\to T(\varphi')$ et donc $T'(\varphi_n)\to T'(\varphi)$. T' est bien une distribution sur $\mathcal{D}$.

II.B.2) On fait une intégration par parties : Soit $\varphi\in\mathcal{D}$. Il existe $a>0$ telle que φ est nulle en dehors de $[-a,a]$. φ' est alors nulle en de hors de $[-a,a]$. On a alors :

$$T_f'(\varphi)=-T_f(\varphi')=-\int_a^a\varphi'(x)f(x)dx=[-f(x)\varphi(x)]_{-a}^a+\int_{-a}^a\varphi(x)f'(x)dx=\int_{-a}^a\varphi(x)f'(x)dx=T_{f'}(\varphi).$$

On a donc bien

$$(T_f)'=T_{f'}$$

. Ceci reste vrai si l'on a une fonction f continue C^1 par morceaux, la dérivée de f étant alors prise au sens usuel aux points où f est dérivable, et arbitraire aux autres points, puisque l'intégration par parties est encore possible comme le savent les $\frac{5}{2}$. (Et les autres n'ont pas à connaître ce qu'est une fonction de classe C^1 par morceaux).

II.B.3) $\forall\varphi\in\mathcal{D}T_U'(\varphi(x))=-T_U(\varphi')=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)dx=-[\varphi(x)]_0^{+\infty}=\varphi(0)$. Donc $\boxed{T_U'=\delta_0.}$

II.B.4) a) On a $\varphi = T_f$, où f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} \text{si } t < -1,\ f(t) = 0 \\ \text{si } t \in [-1,0], f(t) = t \\ \text{si } t \geqslant 0 f(t) = 1 \end{cases}$$

f est bien continue par morceaux, car elle a un seul point de discontinuité, en -1, où elle a une limite à droite (0), et une limite à gauche (-1) finies. Donc T est une distribution régulière.
b) $\forall \varphi \in \mathcal{D} T'(\varphi) = -T(\varphi') = \int_{-1}^{0} t\varphi'(t)dt + \int_{0}^{+\infty} \varphi'(t)dt = -[t\varphi(t)]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \varphi(t)dt + \varphi(0) = \varphi(-1)$.
Donc $\boxed{T' = T_g + \delta_{-1}}$ où g est la dérivée généralisée de f, égale à sa dérivée ordinaire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$ et quelconque ailleurs.

II.B.5) La dérivée est ici la dérivée généralisée, qui prend la valeur de la dérivée usuelle aux points où f est dérivable. a) $\forall \varphi \in \mathcal{D} T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt$ On considère un réel strictement positif a tel que : $\forall x \in \mathbb{R}\, |x| \geqslant a \Rightarrow \varphi(x) = 0$. On suppose de plus, ce qui est possible que $-a < a_1 < \cdots < a_p < a$. On obtient alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-a}^{a} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{a}^{a_1} f(t)\varphi'(t)dt + \sum_{k=1}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi'(t)dtdt + \int_{a_p}^{a} f(t)\varphi'(t)dt$$

(Pour $p = 1$, on convient que la somme du milieu est nulle). La fonction f se prolonge de façon C^1 à chaque intervalle $]-\infty, a_1], [a_1, a_2], \cdots, [a_p, +\infty[$ Appelons $f_0, f_1, \cdots, f_p$ respectivement ces prolongements.
On obtient alors :

$$\int_{-a}^{a_1} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-a}^{a_1} f_0(t)\varphi'(t)dt = [f_0(t)\varphi(t)]_{-a}^{a_1} - \int_{-a}^{a_1} f_0'(t)\varphi(t)dt = f(a_1^-)\varphi(a_1) - \int_{-a}^{a_1} f'(t)\varphi(t)dt$$

De même : $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\varphi'(t)dt = [f_i(t)\varphi(t)]_{-a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i'(t)\varphi(t)dt$
$= f(a_{i+1}^-)\varphi(a_{i+1}) - f(a_i^+)\varphi(a_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)\varphi(t)dt$.
Et enfin, par le même procédé : $\int_{a_p}^{a} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{a_p}^{a} f_p(t)\varphi'(t)dt = [f_p(t)\varphi(t)]_{a_p}^{a} - \int_{a_p}^{a} f_p'(t)\varphi(t)dt$
$= -f(a_p^+)\varphi(a_p) - \int_{a_p}^{a} f'(t)\varphi(t)dt$. Par addition, et changement de signe, on obtient :

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt + \sum_{i=1}^{p} (f(a_i^+) - f(a_i^-))\varphi(a_i).$$

On obtient donc bien :

$$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{p} \sigma(a_i)\delta_{a_i}$$

b) La fonction T_U est de classe C^1 par morceaux, avec un point de discontinuité : $a_1 = 0$ et un saut en a_1 de 1. On a donc $T_U' = T_{U'}\sigma(0)\delta_0 = \delta_0$.. (Car U' est constante par intervalle donc sa dérivée généralisée est nulle). D'où le résultat de la question $II.B.3$.
De même, la fonction f de II.B.4) est de classe C^1 par morceaux, on a un saut de 1 en 0 et la dérivée généralisée vaut 0 sauf sur $]-1,0[$ où elle vaut 1. On retrouve donc bien le résultat de II.B.4).

II.C-Suites de distributions sur $\mathcal{D}$ a) Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$T_{U_n}(\varphi) = \int_{0}^{\frac{1}{n}} U(t)\varphi(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t)dt$$

Or

$$\left| \int_{0}^{\frac{1}{n}} U(t)\varphi(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{n} \|U\|_\infty \|\varphi\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} \|\varphi\|_\infty$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} U(t)\varphi(t)dt = 0.$$

L'intégrale d'une fonction continue est continue par rapport à ses bornes finies, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{+\infty} \varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$$

Et donc, on a bien :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}\lim_{n\to+\infty} T_{U_n}(\varphi) = T_U(\varphi)$$

b)La fonction U_n est continue et de de classe C^1 par morceaux. D'après la question $II.B.2$, on a :

$$\forall\varphi\in\mathcal{D}T'_{U_n}(\varphi) = T_{U'_n}(\varphi) = \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(t)dt$$

puisque la dérivée généralisée de U_n vaut 0 à l'extérieur de l'intervalle $[0,\frac{1}{n}]$ et n à l'intérieur de cet intervalle.
c) On a comme dit précédemment $T'_{U_n} = T_{U'_n}$ (La valeur de U'_n étant arbitraire en 0 et 1.
d) V_n est une fonction en escalier.
e) On a : $\forall\varphi\in\mathcal{D}T'(\varphi) = -T(\varphi')$. Or, si une suite (φ_n) converge vers φ dans $\mathcal{D}$, la suite (φ'_n) converge vers φ'_n dans $\mathcal{D}$ d'après les conditions de convergence données, encore valables pour φ'. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi'_n) = T(\varphi'),$$

et par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} T'(\varphi_n) = T(\varphi).$$

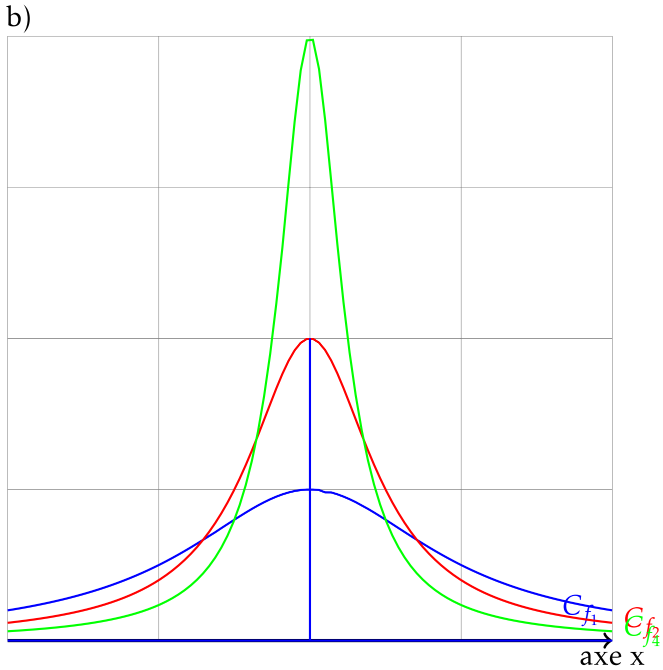
f) On a

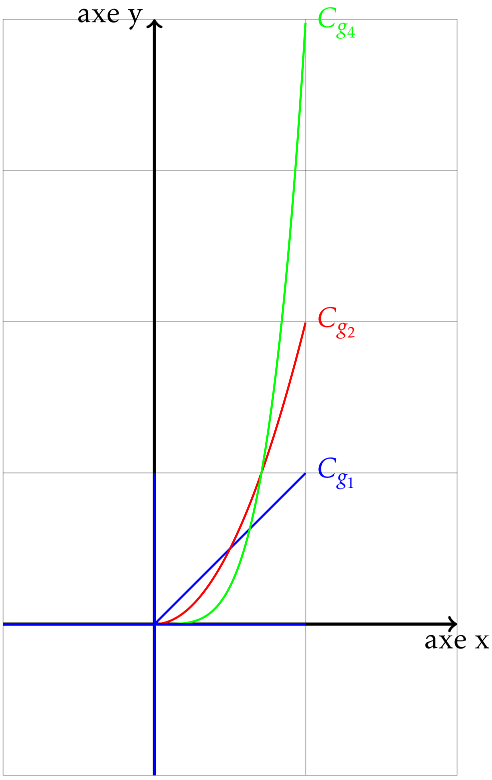
$$\lim_{n\to\infty} T_{U_n} = T_U,$$

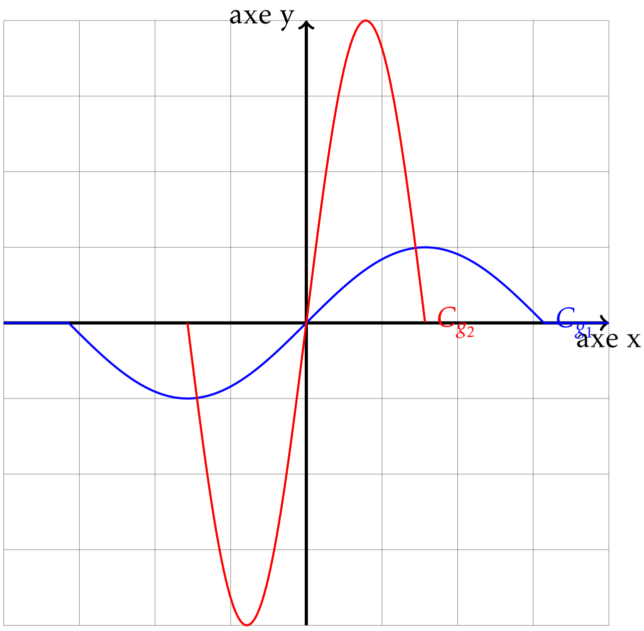
donc

$$\lim_{n\to\infty} T'_{U_n} = T_{U'} = \delta_0.$$

II C2) a)Les trois fonctions données sont continues sur $\mathbb{R}$, sauf en un nombre fini de points où elles ont une limite finie à droite et à gauche.
b)







c) **i)Limite de** (T_{f_n}) Il faut étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\varphi(x)dx$ où $\varphi \in \mathcal{D}$. On effectue le changement de variable $u = nx, du = ndx$ d'où :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+_infty} \varphi\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{1+u^2}$$

On définit la fonction g_n sur $\mathbb{R}$ par $\forall u \in \mathbb{R} g_n(u) = \varphi\left(\frac{u}{n}\right)\frac{1}{1+u^2}$. g_n est définie continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt = I_n$. On a, pour tout $u \in \mathbb{R}$ $\lim_{n_to\infty} g_n(u) = \frac{\varphi(0)}{1+u^2}$. De plus φ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \mathbb{R}$ $g_n(u) \leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+u^2}$.. Or $u \mapsto \frac{1}{1+u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a donc une condition de domination. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} Tf_n(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(0)du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

Par conséquent :

$$\lim_{n\to\infty} T_{f_n} = \frac{\pi}{2}\delta_0$$

ii)Limite de T_{g_n}

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}\ T_{g_n}(\varphi) = \int_0^1 nx^n\varphi(x)dx$$

. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on fait le changement de variable $u = x^n$ et l'on obtient :

$$T_{g_n}(\varphi) = \int_0^1 u^{\frac{1}{n}}\varphi\left(u^{\frac{1}{n}}\right)du$$

Pour tout $u \in]0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} u^{\frac{1}{n}} = 1$, et $\lim_{n\to\infty} 0^{\frac{1}{n}} = 0$. De plus :$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [0,1] \left|u^{\frac{1}{n}}\varphi\left(u^{\frac{1}{n}}\right)\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty$, et la fonction constante $u \mapsto \|\varphi\|_\infty$ est intégrable sur $[0,1]$. On a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi\|_\infty = \int_0^1 \varphi(1)du = \varphi(1).$$

La suite de distributions T_{g_n} converge donc vers δ_1.

iii)Limite de (T_{h_n}) Soit $\varphi \in \mathcal{D}$. On a $T_{h_n}(\varphi) = \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} n^2\varphi(x)\sin(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} n\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\sin(u)du$ (On a posé $u = nx$. On effectue alors une intégration par parties avec $f'(u) = \sin(u), f(u) = -\cos(u), g(u) = n\varphi\left(\frac{u}{n}\right), g'(u) = \varphi'\left(\frac{u}{n}\right)$. On obtient alors :

$$T_{h_n}(\varphi) = \left[-n\cos(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'\left(\frac{u}{n}\right)\cos(u)du$$

Le premier terme vaut $n\left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(\frac{-\pi}{n}\right)\right)$. Comme φ est de classe C^1, elle admet un développement limité en $0\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + o_0(h)$. Donc

$$n\left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right) = 2\pi\varphi'(0) + o_0\left(\frac{1}{n}\right).$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right) - \varphi\left(\frac{-\pi}{n}\right)\right) = 2\pi\varphi'(0).$$

Quant à l'intégrale, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :
D'une part, par continuité de φ' : :

$$\forall u \in [0,1], \lim_{n\to+\infty} \varphi'\left(\frac{u}{n}\right)\cos(u) = \varphi'(0)\cos(u).$$

D'autre part, comme $\varphi' \in \mathcal{D}$, elle est bornée et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall u \in [-\pi,\pi] \left|\varphi'\left(\frac{u}{n}\right)\cos(u)\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty.$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'\left(\frac{u}{n}\right)\cos(u)du = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(u)du = 0.$$

Et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} T_{h_n}(\varphi) = 2\pi\varphi'(0).$$

Soit

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_{h_n} = -2\pi\delta_0'.}$$