

**Corrigé de la première épreuve de mathématique
Centrale PC 2021**

Q1)

Y_n suit la loi binomiale $B(n, p)$. $\mathbb{E}(Y_n) = np$ $\mathbb{V}(Y_n) = np(1 - p)$.

Q2)

Y_n est le nombre de fois où on a obtenu 1 , donc les $n - Y_n$ autres fois on a obtenu -1 .Donc

$$S_n = Y_n - (n - Y_n) = 2Y_n - n$$

.

$$\mathbb{E}(S_n) = 2np - n = n(2p - 1) \quad \mathbb{V}(S_n) = 4\mathbb{V}(Y_n) = 4np(1 - p)$$

.

$2Y_n = n + S_n$, la somme est pair , donc n et S_n ont la même parité.

Q3)

$$C_3 = 5.$$

Q4)

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$.

Pour tout entier $0 \leq k \leq 2n + 2$ on a $s_\gamma(k) \geq 0$, donc

$$s_\gamma(2r) + \gamma_{2r+1} = s_\gamma(2r + 1) \geq 0 \implies \gamma_{2r+1} \geq 0 \implies \gamma_{2r+1} = 1$$

$$s_\gamma(2n + 1) + \gamma(2n + 2) = s_\gamma(2n + 2) = 0 \implies \gamma(2n + 2) = -s_\gamma(2n + 1) \leq 0 \implies \gamma(2n + 2) = -1$$

D'autre part comme Pour tout entier $0 \leq k \leq 2n + 2$ on a $s_\gamma(k) \geq 0$, on a donc Pour tout entier $0 \leq k \leq 2r$ on a $s_\gamma(k) \geq 0$ et $s_\gamma(2r) = 0$, donc on en déduit que $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$ est un chemin de Dyck de longueur $2r$.

On fait de même pour β .

Q5)

γ est un chemin de Dyck de longueur $2n$, la somme finale est 0 , donc il y a exactement n déplacements positifs et les autres sont négatifs , mais ils sont déjà fixés on a donc :

$$\mathbb{P}(A_{t,\gamma}) = p^n(1 - p)^n$$

.

Q6)

Pour $n \in \mathbb{B}$ on va chercher le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n + 2$ et qui retourne à l'origine pour la première fois à l'ordre $2n + 2$; c'est à dire le nombre de chemins $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ tel que Pour tout entier $1 \leq k \leq 2n + 1$ on a $s_\gamma(k) > 0$ et $s_\gamma(2n + 2) = 0$.

Pour $n = 0$, il n'y a qu'une seule possibilité .

pour $n \geq 1$.

$s_\gamma(1) > 0$, donc $\gamma_1 = 1$; comme $s_\gamma(2) > 0$, on a donc forcément $\gamma_2 = 1$ et on a déjà vu que

$$\gamma_{2n+2} = -1.$$

Si on considère le chemin $\delta = (\gamma_2, \dots, \gamma_{2n+1})$, δ est un chemin de Dyck (facile à vérifier : vous supposer que ce n'est pas un chemin de Dyck, vous prenez le plus petit entier j tel que la somme de 2 à j est -1 et on trouve que $s_\gamma(j) = 0$ et donc le chemin retourne à l'origine avant l'étape $2n + 2$. Réciproquement si on prend un chemin de Dyck de longueur $2n$, et on lui rajoute au départ 1 et à la fin -1 , on trouve un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$ et dont la somme s'annule pour la première fois à l'ordre $2n + 2$.

Donc le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n + 2$ et qui retourne à l'origine pour la première fois à l'ordre $2n + 2$ est le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ soit donc C_n .

Il y a encore exactement le même de chemins qui sont dans la partie négative c'est à dire qui commence avec un pas négatif et qui retourne à l'origine pour la première fois à l'ordre $2n + 2$ (une symétrie par rapport à l'axe des abscisses).

Donc au total il y a $2C_n$ chemins de longueurs $2n + 2$ qui retournent à l'origine pour la première fois à l'ordre $2n + 2$, et pour chaque chemin la probabilité est calculé dans la question 5 c'est : $p^{n+1}(1-p)^{n+1}$

On a donc :

$$\mathbb{P}(T = 2n + 2) = 2C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$$

L'événement $T = 2n + 1$ est impossible, car si la somme est égale à 0 on a autant de déplacement positifs que négatifs (une somme impair de 1 et -1 est toujours différente de 0).

Q7)

On va définir pour $0 \leq r \leq n$ $C_{n+1,r}$ le cardinal de l'ensemble de chemins γ de Dyck de longueur $2n + 2$ et tel que $r = \max\{i \in \{0, 1, \dots, n\} : s_\gamma(2i) = 0\}$ on a donc :

$$C_{n+1} = \sum_{r=0}^n C_{n+1,r} = \sum_{r=0}^n C_r C_{n-r}$$

On peut facilement établir une bijection d'après la question 4 $\gamma \mapsto (\alpha, \beta)$

Q8)

$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T = 0) + \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(T = 2n + 2)$ est convergente

(la somme des probabilités est 1)

Donc on a $\sum_{n \geq 0} C_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$ est convergente. En particulier pour $p = \frac{1}{2}$ on trouve donc $\sum_{n \geq 0} C_n \frac{1}{4^{n+1}}$ converge.

Q9)

Pour $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, on a : $|C_n t^n| \leq C_n \frac{1}{4^n}$ ce qui nous donne la convergence normale.

Q10)

$$\begin{aligned}
G_T(t) &= \mathbb{P}(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = 2n + 2)t^{2n+2} \\
&= \mathbb{P}(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n p^{n+1} (1-p)^{n+1} t^{2n+2} \\
&= \mathbb{P}(T = 0) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n p^{n+1} (1-p)^{n+1} t^{2n+2} \\
&= \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1-p)t^2)
\end{aligned}$$

Q11)

$$\begin{aligned}
f(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n t^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} t^{n+1} \\
&= 1 + t \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+1} t^n \\
&= 1 + t \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} \right) t^n = 1 + t(f(t))^2
\end{aligned}$$

On a donc $t(f(t))^2 = f(t) - 1$ puis on multiplie par $4t$ et on trouve le résultat.

Q13)

$g(t)$ est une solution du polynôme $X^2 - 2X + 4t$.

Q14)

Pour $t \in I \setminus \{\frac{1}{4}\}$ on peut écrire : $\varepsilon(t) = \frac{g(t) - 1}{\sqrt{1 - 4t}}$

Donc la fonction ε est continue sur $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$ et ne prend que deux valeurs possible, elle est constante. Comme $g(0) = 0$ on a donc $\varepsilon(0) = -1$, et donc $g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t} \quad \forall t \in I \setminus \{\frac{1}{4}\}$, et on conclut par continuité.

Q15)

$1 = G_T(1) = \mathbb{P}(T = 0) + g(p(1-p))$, donc :

$$\mathbb{P}(T \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(T = 0) = g(p(1-p)) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$$

Pour $p = \frac{1}{2}$ on a $\mathbb{P}(T \neq 0) = 1$, donc la particule revient presque sûrement à l'origine au moins une fois. En plus ce retour est récurrent, c'est à dire, une fois qu'elle retourne, elle va le faire presque sûrement une autre fois, et ainsi de suite.

Q16)

Si $p = \frac{1}{2}$ on a : $G_T(1) = g(\frac{t^2}{4}) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$
 G_T n'est pas dérivable au point 1.

Q17)

On sait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto (1+t)^\alpha$ est développable en série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et on a la formule :

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n \quad \forall t \in]-1, 1[\quad b_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k)}{n!}$$

Dans ce cas particulier $\alpha = \frac{1}{2}$ on trouve :

$$b_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} - k)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{(2n)!}{4^{n+1} (n!)^2 (2n+1)} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^{n+1} (2n+1)} x^{n+1} \end{aligned}$$

Finalement :

$$a_n = 2(-1)^n \frac{\binom{2n}{n}}{4^{n+1} (2n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Q18)

$$g(t) = 1 - \sqrt{1-4t} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)} t^{n+1} \quad (\text{on remplace } x \text{ par } -4t)$$

Si on prend $p = \frac{1}{2}$, on trouve $\mathbb{P}(T=0) = 0$ et :

$$G_T(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2C_n \frac{1}{4^{n+1}} t^{2n+2} = g\left(\frac{t^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \frac{\binom{2n}{n}}{4^{n+1} (2n+1)} t^{2(n+1)}$$

Par identification on a :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Q19)

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \quad \text{et on trouve alors} \quad C_n \sim \frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}}$$

Q20)

$$nC_n p^{n+1} (1-p)^{n+1} \sim \frac{1}{4\sqrt{n\pi}} (4p(1-p))^{n+1}$$

Si $p = \frac{1}{2}$ $nC_n p^{n+1}(1-p)^{n+1} \sim \frac{1}{4\sqrt{n\pi}}$, donc la série est divergente , d'où la variable T n'admet pas d'espérance

Si $p \neq \frac{1}{2}$ on a $0 \leq 4p(1-p) < 1$ donc la série est convergente , d'où la variable admet une espérance.

Q21)

La famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$ est un système orthogonal , donc la famille est échelonnée en degré donc libre contenue dans $\mathbb{R}_n[X]$, de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, et cette famille est orthogonale.

Q22)

$(V_0, V_1, \dots, V_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ des réels tel que : $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i V_i$.

$(V_n, P) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (V_n, V_i) = 0$ en utilisant l'orthogonalité de la famille $(V_0, V_1, \dots, V_n)$.

Q23)

Soit $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un autre système orthogonal.

$\deg(W_0) = \deg(V_0) = 0$, et ils sont tous les deux unitaires, on a donc $W_0 = V_0 = 1$.

Supposons que $W_i = V_i$ pour $0 \leq i \leq n-1$ avec n un entier non nul .

Comme $\deg(W_n) = \deg(V_n) = n$, et les deux polynômes sont unitaires , alors :

$P = W_n - V_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on peut alors écrire en utilisant la question 22 :

$$\|W_n - V_n\|^2 = (W_n - V_n, P) = (W_n, P) - (V_n, P) = 0$$

D'où : $W_n = V_n$.

Q24)

Pour $0 \leq k \leq n$ $\deg(V_k) = k$, donc il existe $q_{k,0}, q_{k,1}, \dots, q_{k,k}$ des réels tel que $V_k = \sum_{i=0}^k q_{k,i} X^i$.

Comme V_k est unitaire on a $q_{k,k} = 1$ et la matrice Q_n est triangulaire supérieur avec des 1 sur la diagonale, on a facilement $\det(Q_n) = 1$.

Q25)

Pour $0 \leq i \leq n$, on a $V_i = \sum_{k=1}^{n+1} q_{i,k-1} X^{k-1}$, ce qui implique que :

$$(V_i, V_j) = \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{h=1}^{n+1} q_{i,k-1} q_{j,h-1} (X^i, X^j)$$

En développant le produit $Q_n^T G_n Q_n$ on trouve l'égalité.

Q26)

La famille $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal , donc la matrice G'_n est une matrice diagonale .

$$\prod_{i=0}^n \|V_i\| = \det(G'_n) = \det(Q_n^T G_n Q_n) = \det(Q_n^T) \det(G_n) \det(Q_n) = \det(G_n)$$

Q27)

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. La fonction $f : x \mapsto P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x}$ est continue sur $[0, 1]$, elle est donc bornée et atteint ses bornes sur $[0, 1]$, il existe donc $M > 0$ telle que :

$$|P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x}| \leq M \quad \forall x \in [0, 1] \implies \frac{|P(4x)Q(4x)\sqrt{1-x}|}{\sqrt{x}} \leq \frac{M}{\sqrt{x}} \quad \forall x \in]0, 1]$$

On conclut en rappelant que $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$, car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2}$.

Q28)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $(P, P) = 0$.

$$\int_0^1 \frac{(P(4x))^2 \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx = 0.$$

La fonction qu'on intègre est continue positive sur $]0, 1]$, donc on a :

$$(P(4x))^2 \sqrt{1-x} = 0 \quad \forall x \in]0, 1] \implies P(4x) = 0 \quad \forall x \in]0, 1[$$

Le polynôme admet donc une infinité de racine, c'est donc le polynôme nul. Les autres propriétés du produit scalaire sont facile à établir.

Q29)

Pour le degré et le coefficient dominant de U_n on le fait par récurrence double.

$$U_{n+2}(0) = -2U_{n+1}(0) - U_n(0) \implies U_{n+2}(0) + U_{n+1}(0) = -(U_{n+1}(0) + U_n(0))$$

On pose $r_n = U_{n+1}(0) + U_n(0)$, la suite $(r_n)_n$ est donc géométrique de raison -1 et $r_0 = 0$, donc c'est la suite nulle, ce qui implique que $U_{n+1}(0) = -U_n(0)$ pour tout entier n . La suite $(U_n(0))_n$ est alors géométrique de raison -1 et de premier terme 1, on conclut alors que $U_n(0) = (-1)^n$ pour tout entier n .

Q30)

Par récurrence sur n .
trivial pour $n = 0$.

$$U_1(4\cos^2(\theta))\sin(\theta) = 4\cos(\theta)\sin(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta) = 2\sin(2\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)$$

et on utilise la relation $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

Supposons que $U_k(4\cos^2(\theta))\sin(\theta) = \sin((2k+1)\theta) \quad \forall 0 \leq k \leq n+1$

$$\begin{aligned} U_{n+2}(4\cos^2(\theta))\sin(\theta) &= (4\cos^2(\theta) - 2)U_{n+1}(4\cos^2(\theta))\sin(\theta) - U_n(4\cos^2(\theta))\sin(\theta) \\ &= 2\cos(2\theta)\sin((2n+3)\theta) - \sin((2n+1)\theta) \end{aligned}$$

On peut alors conclure comme dans le cas $n = 1$.

Q31)

La relation : $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ donne :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(m-n)\theta) + \cos(2(m+n+1)\theta)d\theta$$

En distinguant les cas $m = n$ et $m \neq n$, on trouve : 0 si $m \neq n$ et $\frac{\pi}{4}$ si $m = n$.

Q32)

$$(U_m, U_n) = \int_0^1 \frac{U_m(4x)U_n(4x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Avec le changement de variable $x = 4\cos^2(\theta)$ et le résultat de la question 30, on trouve :

$$(U_m, U_n) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2m+1)\theta)\sin((2n+1)\theta)d\theta$$

Le résultat en découle immédiatement.

Q33)

Pour l'intégration par parties on pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^{n-\frac{3}{2}} & u(x) &= \frac{2}{2n-1} x^{n-\frac{1}{2}} \\ v(x) &= (1-x)\frac{3}{2} & v'(x) &= \frac{3}{2}\sqrt{1-x} \end{aligned}$$

Q34)

La question précédente nous donne :

$$4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{3}{2n-1}\mu_n \implies 4\mu_{n-1} = \frac{2(n+1)}{2n-1}\mu_n$$

On trouve donc la relation :

$$\mu_n = \frac{2(2n-1)}{n+1}\mu_{n-1}$$

Avec la formule $\mu_0 = 1$, une récurrence facile nous permet de trouver que :

$$\mu_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = C_n$$

Q35)

En remarquant que :

$$\mu_{i+j} = (X^{i+j}, 1) = (X^i, X^j) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(4X)^{i+j}\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$$

On conclut que : $H_n = \det(G_n)$ avec G_n la matrice décrite dans le début de la deuxième partie. $(U_n)_n$ est un système orthogonal pour ce produit scalaire, la question 26 nous donne :

$$H_n = \prod_{k=0}^n \|U_k\| = 1$$

Q36)

Si on développe le déterminant $D_n(X)$ par rapport à la dernière ligne, on va s'apercevoir que $D_n(X)$ est un polynôme unitaire de degré n .

(D_n, X_k) est le déterminant d'une matrice qui a les mêmes n premières lignes que la matrice $D_n(X)$ mais sa dernière ligne est :

$$((X^k, 1), (X^k, X), \dots, (X^k, X^n)) = (C_k, C_{k+1}, \dots, C_{n+k})$$

$(D_n, X_k) = 0$ car on a un déterminant avec deux lignes identiques si $k < n$.

Q37)

Par linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable, on conclut que $(D_n, P) = 0$ for all $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Si on prend $m \neq n$, on a par exemple $m < n$, on trouve alors $(D_n, D_m) = 0$.

la famille $(D_n)_n$ est un système orthogonal, et par unicité (démontré dans la question 23) on a

$$D_n = U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$H'_n = D_n(0) = U_n(0) = (-1)^n$$

On remplace X par 0 dans $D_n(X)$ et on développe suivant la dernière ligne.