Centrale M1 2019 - Corrigé

I. Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $T_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit, donc ce sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $S_2(\mathbb{K})$ et $A_2(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   Cependant, $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{K})$, mais $AB = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \notin S_2(\mathbb{K})$, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, donc $S_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \in A_2(\mathbb{K})$ et $C^2 = -I_2 \notin A_2(\mathbb{K})$, donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas stable par produit, donc $A_2(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
3. En prenant $A_n = \begin{pmatrix}A & 0_{2,n-2}\\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2}\end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$, $B_n = \begin{pmatrix}B & 0_{2,n-2}\\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2}\end{pmatrix} \in S_n(\mathbb{K})$ et $C_n = \begin{pmatrix}C & 0_{2,n-2}\\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2}\end{pmatrix} \in A_n(\mathbb{K})$, on a $A_nB_n = \begin{pmatrix}AB & 0_{2,n-2}\\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2}\end{pmatrix} \notin S_n(\mathbb{K})$ et $C_n^2 = \begin{pmatrix}-I_2 & 0_{2,n-2}\\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2}\end{pmatrix} \notin A_n(\mathbb{K})$, donc $A_n(\mathbb{K})$ et $S_n(\mathbb{K})$ ne sont pas stables par produit, donc $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ ne sont pas des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

4. • $\mathcal{A}_F \subset \mathcal{L}(E)$ par définition de $\mathcal{A}_F$.
   • l'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}_F$ car $0_{\mathcal{L}(E)}(F) = \{0_E\} \subset F$, donc $\mathcal{A}_F \neq \varnothing$.
   • Pour tout $(u,v) \in (\mathcal{A}_F)^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in F$,
   $$(\lambda u + v)(x) = \lambda \underbrace{u(x)}_{\in F \text{ car } u \in \mathcal{A}_F} + \underbrace{v(x)}_{\in F \text{ car } v \in \mathcal{A}_F} \in F \text{ car } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E,$$
   donc $(\lambda u + v)(F) \subset F$, donc $\lambda u + v \in \mathcal{A}_F$.
   • $\mathcal{A}_F$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
   • De plus, pour tout $(u,v) \in (\mathcal{A}_F)^2$, $u \circ v(F) = u(v(F)) \subset u(F) \subset F$, donc $u \circ v \in \mathcal{A}_F$, donc $\mathcal{A}_F$ est stable par composition.
   • $\mathcal{A}_F$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
5. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F complétée en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E.
   Alors $u \in \mathcal{A}_F \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $\begin{pmatrix}A & B\\ 0_{n-p,p} & C\end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
   Comme $u \mapsto Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, on a
   $$\dim \mathcal{A}_F = \dim \left\{ \begin{pmatrix}A & B\\ 0_{n-p,p} & C\end{pmatrix},\ A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})\ C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K}) \right\} = p^2 + p(n-p) + (n-p)^2 = n^2 - pn + p^2.$$
6. Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $n^2 - np + p^2 = \left(p - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2$, donc $(n^2 - pn + p^2)$ est maximum quand $\left(p - \frac{1}{2}n\right)^2$ est maximum, donc pour $p = 1$ ou $p = n-1$, et ce maximum vaut $\left(1 - \frac{1}{2}n\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 = n^2 - n + 1$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

7. • $\Gamma(\mathbb{K}) = \text{Vect}\left(I_2, \underbrace{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\text{notée } C} \right)$, donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   • De plus, comme $C^2 = -I_2$, on a, pour tout $(aI_2 + bC, cI_2 + dC) \in \Gamma(\mathbb{K})^2$,
   $$(aI_2 + bC)(cI_2 + dC) = \underbrace{(ac - bd)}_{\in \mathbb{K}} I_2 + \underbrace{(ad + bc)}_{\in \mathbb{K}} C \in \Gamma(\mathbb{K}),$$
   donc $\Gamma(\mathbb{K})$ est stable par produit.
   • $\Gamma(\mathbb{K})$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
8. On a $\chi_C(X) = X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc C n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

9. • Comme $\chi_C(X) = X^2 + 1 = (X+i)(X-i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(i, -i)$ diagonale telles que $C = PDP^{-1}$.
   • Alors, pour tout $aI_2 + bC \in \Gamma(\mathbb{K})$,
$$P^{-1}(aI_2 + bC)P = aPI_2P^{-1} + bP^{-1}CP = aI_2 + b\text{diag}(i,-i) = \text{diag}(a+bi, a-bi),$$
   donc $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II. Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

II.A - Calcul des puissances de J

10. • On a $J = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(\varphi) = J(0,1,0,0,\ldots,0)$.
   • $J^2 = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(\varphi^2)$.
   Or, pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$, $\varphi^2(e_i) = \varphi(e_{i+1}) = e_{i+2}$, $\varphi^2(e_{n-1}) = \varphi(e_n) = e_1$ et $\varphi^2(e_n) = \varphi(e_1) = e_2$, donc
$$J_2 = Mat_{(e_1,\ldots,e_n)}(\varphi^2(e_1), \ldots \varphi^2(e_n)) = \begin{cases} I_2 & \text{si } n = 2 \\ J(0,0,1,0,\ldots,0) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

11. Soit $n \geq 3$.
   On vérifie par le calcul que $J \times J(a_0, a_1 \ldots, a_{n-1}) = J(a_{n-1}, a_0, \ldots, a_{n-2})$, puis, par récurrence immédiate, on obtient : $J^k = J(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ ($a_k = 1$ et $a_i = 0$ pour tout $i \neq k$) et $J^n = I_n$.

12. On a $J(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J(0,\ldots,0,\underbrace{1}_{\text{position } k},0,\ldots,0) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k$.

II.B - Une base de $\mathcal{A}$

13. • La famille $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est composée d'éléments de $\mathcal{A}$ d'après la question 11.
   • D'après la question 12, $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est génératrice de $\mathcal{A}$.
   • De plus, pour tout $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, toujours d'après la question 13, on a :
$$a_0 I_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k J^k = 0_n \Leftrightarrow J(a_0, \ldots a_{n-1}) = 0_n \Leftrightarrow a_0 = \ldots = a_{n-1} = 0,$$
   donc la famille $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est libre.
   • $(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est donc bien une base de $\mathcal{A}$, qui est donc de dimension n.

14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   • Si M commute avec J, alors, par récurrence immédiate, M commute avec J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   Par suite, pour tout $N = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,
$$MN = M\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k M J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k M = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) M = NM,$$
   donc M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.
   • Réciproquement, si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$, M commute avec J car $J \in \mathcal{A}$.
   • par double-implication, on a donc bien l'équivalence souhaitée.

15. • $\mathcal{A} = \text{Vect}(I_n, J, J^2, \ldots, J^{n-1})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   • Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, pour tout $N = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,
$$\begin{aligned} J^i N = J^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+i} = \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k J^{k+i} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k J^{k+i} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^n}_{=I_n} J^{k+i-n} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1-i} a_k \underbrace{J^{k+i}}_{\in\mathcal{A} \text{ car } k+i \in [\![0,n-1]\!]} + \sum_{k=n-i}^{n-1} a_k \underbrace{J^{k+1-n}}_{\in\mathcal{A} \text{ car } k+i-n \in [\![0,n-1]\!]} \in \mathcal{A} \text{ comme combinaison linéaire d'éléments de } \mathcal{A}. \end{aligned}$$
   $\mathcal{A}$ est donc stable par produit, donc $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   • Pour tout $N = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,
$$JN = J\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J J^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k J = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right) J = NJ,$$

donc N commute avec J, donc, d'après la question précédente, N commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}$ est donc bien une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.C - Diagonalisation de J

16. On a

$$\chi_J(X) = \det(XI_n - J) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & X & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$= X \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & X & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

(dvlpt par rapport à la dernière colonne)

$$= X \times X^{n-1} + (-1)^{n+2} \times (-1)^{n-1} \quad \text{(déterminant de matrices triangulaires)}$$

$$= X^n + (-1)^{2n+1} = X^n - 1.$$

17. Par suite, χ_J est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (ses racines sont les racines n-ème de l'unité), donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

18. Pour $n = 2$, $\chi_J = (X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Si $n \geq 3$, χ_J n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc J n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

19. D'après la question 17, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{e^{2ik\pi/n},\ k \in [\![0, n-1]\!]\} = \{\omega^k, k \in [\![0, n-1]\!]\}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$J \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{nk} \\ \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \end{pmatrix} = \omega^k \begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

donc $\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre ω^k.

Par suite, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right) \subset E_{\omega^k}(J)$, et, comme ω^k est une valeur propre simple, on a $\dim E_{\omega^k}(J) = 1 = \dim \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
donc, comme on a une inclusion et l'égalité des dimensions, on a :

$$E_{\omega^k}(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \omega^{(n-1)k} \\ \omega^{(n-2)k} \\ \vdots \\ \omega^k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

II.D - Diagonalisation de $\mathcal{A}$

20. La preuve faite en question 15 avec $\mathbb{K}$ au lieu de $\mathbb{R}$ permet de conclure directement ici que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre (commutative) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

21. Comme J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale telles que $P^{-1}JP = D$.
On peut même particulariser P et D à l'aide de la question 19, mais une telle précision ne servira à rien dans la suite de cette preuve.

Alors, par récurrence immédiate, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}J^kP = D^k$. Puis, pour tout $M = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \in \mathcal{A}$,

$$P^{-1}MP = P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k\right)P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1}J^kP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k,$$

qui est diagonale come combinaison linéaire de matrices diagonales.
$\mathcal{A}$ est donc une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

22. En choisissant bien la matrice P dans la question précédente, on a $D = \text{diag}((\omega^i)_{i=0..n-1})$, donc

$$\begin{aligned} P^{-1}J(a_0,\ldots,a_{n-1})P &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \text{diag}((\omega^{ki})_{i=0..n-1}) \\ &= \text{diag}\left(\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{ki}\right)_{i=0..n-1}\right), \end{aligned}$$

donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(J(a_0,\ldots,a_{n-1})) = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{ki}, \quad i \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

III. Sous-algèbres strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension maximale

III.A - Un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

23. • Pour tout $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle M, N\rangle = \text{tr}(M^TN) = \text{tr}((M^TN)^T) = \text{tr}(N^TM) = \langle N, M\rangle$, donc $\langle,\rangle$ est symétrique.
• Pour tout $(M, N, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \lambda M + N, P\rangle &= \text{tr}((\lambda M + N)^TP) = \text{tr}(\lambda M^TP + N^TP) \quad \text{(linéarité de la transposition)} \\ &= \lambda\text{tr}(M^TP) + \text{tr}(N^TP) \quad \text{(linéarité de la trace)} \\ &= \lambda\langle M, P\rangle + \langle N, P\rangle, \end{aligned}$$

donc $\langle,\rangle$ est linéaire à gauche.
• $\langle,\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$(M^TM)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n}(M^T)_{i,k}(M)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2,$$

donc

$$\langle M, M\rangle = \text{tr}(M^TM) = \sum_{i=1}^{n}(M^TM)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}^2 = \sum_{1\leq i,k\leq n} m_{i,k}^2.$$

Par suite, il est clair que $\langle M, M\rangle \geq 0$ (comme somme de positifs) et on a

$$\langle M, M\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{1\leq i,k\leq n} m_{i,k}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall (i,k) \in [\![1, n]\!]^2, m_{i,k} = 0 \Leftrightarrow M = 0_n.$$

$\langle,\rangle$ est donc bien défini positif.
• $\langle,\rangle$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

24. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle.,.\rangle)$ est un espace euclidien, donc $\dim\mathcal{A} + \dim\mathcal{A}^\perp = \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ie $d + r = n^2$.

25. Comme $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \langle.,.\rangle)$ est un espace euclidien, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^\perp)^\perp$.
• Soit $M \in \mathcal{A}$. Alors, pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, $\langle M, N\rangle = 0$.
En particulier, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, comme $A_i \in \mathcal{A}^\perp$, on a $\langle A_i, M\rangle = 0$.
• Réciproquement, supposons que pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\langle A_i, M\rangle = 0$. Comme $(A_1,\ldots,A_r)$ est une base de $\mathcal{A}^\perp$, pour tout $N \in \mathcal{A}^\perp$, il existe $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $N = \sum_{i=1}^{n} a_iA_i$.
Alors, par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\langle N, M\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\langle A_i, M\rangle}_{=0} = 0,$$

donc $M \in (\mathcal{A}^\perp)^\perp = \mathcal{A}$.
• On a donc bien, par double-implication, l'équivalence souhaitée.

26. Soit $N \in \mathcal{A}$ et $i \in [\![1, r]\!]$.
Pour tout $M \in \mathcal{A}$,

$$\left\langle M, N^TA_i\right\rangle = \text{tr}(M^TN^TA_i) = \text{tr}((NM)^TA_i) = \langle NM, A_i\rangle = 0$$

d'après la question précédente avec $NM \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit.
On a donc bien $N^TA_i \in \mathcal{A}^\perp$.

III.B - Conclusion

27. • L'application transposition $Trans : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et $Trans^{-1} = Trans$), donc $\mathcal{A}^T = Trans(\mathcal{A})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension que $\mathcal{A}$ comme image d'un sous-espace vectoriel par un isomorphisme.
    • Pour tout $(A,B) \in (\mathcal{A}^T)^2$, il existe $(M,N) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A = M^T$ et $B = N^T$.
    Alors $AB = M^T N^T = (NM)^T \in \mathcal{A}^T$ car $\mathcal{A}$ est stable par produit, donc $NM \in \mathcal{A}$.
    $\mathcal{A}^T$ est donc stable par produit, donc c'est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
28. Pour tout $M^T \in \mathcal{A}^\perp$, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $M^T A_i \in \mathcal{A}^\perp$ d'après la question 26, donc, comme $(A_1,\dots,A_r)$ est une base de $\mathcal{A}^\perp$, il existe $(a_1,\dots,a_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que $M^T A_i = \sum_{k=1}^{r} a_k A_k$ et, par suite,
$$M^T A_i X = \sum_{k=1}^{n} a_k A_k X \in \mathrm{Vect}(A_1X,\dots,A_rX).$$
    Par suite, $M^T(F) = \mathrm{Vect}(M^T A_1 X,\dots,M^T A_r X) \subset F$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de F, donc F est stable par M^T. cqfd.
29. • Si $d > n^2 - n + 1$, alors $r = n^2 - d < n - 1$. Soit $X \notin \mathrm{Ker}\, A_1$ (possible car $A_1 \neq 0$ car la famille $(A_1,\dots,A_r)$ est libre).
    Soit $F = \mathrm{Vect}(A_1X,\dots,A_rX)$. On a :
    – $\dim F \leq r < n$, donc $F \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
    – $\dim F \geq 1$, car $A_1X \neq 0$, donc $F \neq \{0\}$.
    De plus, en identifiant les matrices et leur application linéaire canoniquement associée, on a
$$\mathcal{A}^T \subset \mathcal{A}_F, \quad \text{où cette notation a été introduite dans la partie I.B.}$$
    On a donc
$$\begin{aligned} d = \dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}^T &\quad \text{(d'après la question 27)} \\ \leq \dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2 &\quad \text{(d'après la question 5)} \\ \leq \max_{1\leq p\leq n-1} n^2 - pn + p^2 = n^2 - n + 1, &\quad \text{ce qui est contraire à l'hypothèse sur } d. \end{aligned}$$
    D'où, par l'absurde, $d \leq n^2 - n + 1$.
    • Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. En posant $F = \mathrm{Vect}(X)$ de dimension 1, $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) : u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n^2 - n + 1$ d'après la question 5.
    Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, d'après les remarques préliminaires, $\{Mat_{\mathcal{B}}(u), u \in \mathcal{A}_F\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de même dimension, donc de dimension $n^2 - n + 1$.
    Le majorant $n^2 - n + 1$ de la dimension d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est donc atteint, donc $n^2 - n + 1$ est la dimension maximale d'une sous-algèbre stricte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV. Réduction d'une algèbre nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

30. Si E est de dimension 1, alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension $1^2 = 1$, donc $\mathcal{A} = \{0\}$ ou $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.
    Comme Id_E n'est pas nilpotente, $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$, donc $\mathcal{A} = \{0\}$, et $\mathcal{A}$ est bien trigonalisable.
    On peut aussi remarquer que la matrice de n'importe quel endomorphisme de E est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$, donc automatiquement triangulaire.
31. Comme Id_E n'est pas nilpotente, $\mathrm{Id}_E \notin \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$, La contraposée du théorème de Burnside assure alors l'existence d'un sous-espace vectoriel V de E distinct de E et $\{0\}$ stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.
32. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1,\dots,e_r)$ une base de V complétée en une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E.
    Alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$, pour tout $j \in [\![1,r]\!]$, $u(e_j) \in F = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_r)$, donc il existe $(a_{i,j})_{i\in[\![1,r]\!]}$ tel que $u(e_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{i,j} e_j$.
    Alors on a
$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u(e_1),\dots,u(e_r),u(e_{r+1}),\dots,u(e_n)) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix},$$
    où $A(u) = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq r} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B(u) \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D(u) \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
33. • Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ et $D \in \mathcal{M}_s(\mathbb{C})$.
    Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$ (HR_p)
    Initialisation : Pour $p = 0$, $M^0 = I_p = \begin{pmatrix} A^0 & B_0 \\ 0 & D^0 \end{pmatrix}$ en posant $B_0 = 0_{r,s}$.
    Pour $p = 1$, $B_1 = B$ convient.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons HR_p vérifiée.
Alors

$$M^{p+1} = M^p M \underset{HR_p}{=} \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & A^p B + B_p D \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{p+1} & B_{p+1} \\ 0 & D^{p+1} \end{pmatrix}$$

en posant $B_{p+1} = A^p B + B_p D$. On a bien HR_{p+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $B_p \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ telle que $M^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}$.

• Soit $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$. Alors il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$.
Alors, d'après le premier point, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^p) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} A^p & B_p \\ 0 & D^p \end{pmatrix}.$$

Or $u \in \mathcal{A}$, donc u est nilpotent, donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u^{p_0} = 0$ et, par suite, $0 = \begin{pmatrix} A^{p_0} & B_{p_0} \\ 0 & D^{p_0} \end{pmatrix}$, donc $A^{p_0} = 0$, donc A est nilpotente.
• Pour tout $(u, v) \in \mathcal{A}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$Mat_{\mathcal{B}}(\lambda u + v) = \lambda Mat_{\mathcal{B}}(u) + Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda A(u) + A(v) & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc $A(\lambda u + v) = \lambda A(u) + A(v)$.
$\varphi : u \in \mathcal{A} \mapsto A(u) \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ est donc une application linéaire, donc $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\} = \operatorname{Im} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$.
• Pour tout $(A, B) \in (\{A(u) | u \in \mathcal{A}\})^2$, il existe u et $v \in \mathcal{A}$ tels que $A = A(u)$ et $B = A(v)$, c'est-à-dire $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ et $Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} B & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.
Alors $u \circ v \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ et

$$Mat_{\mathcal{B}}(u \circ v) = Mat_{\mathcal{B}}(u) \times Mat_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} AB & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

donc $AB = A(u \circ v) \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$.
$\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est donc stable par produit.
• $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est donc bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.
• On montre de même que $\{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_s(\mathbb{C})$ constituée de matrices nilpotentes.

34. • $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_r(\mathbb{C})$ dont tous les éléments sont nilpotents, donc, comme $r \leq n - 1$, $\{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$ est trigonalisable (version matricielle de l'hypothèse de récurrence), ie il existe $P \in GL_r(\mathbb{C})$ telle que pour tout $A \in \{A(u) | u \in \mathcal{A}\}$, $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
• De même, il existe $Q \in GL_s(\mathbb{C})$ telle que pour tout $D \in \{D(u) | u \in \mathcal{A}\}$, $P^{-1}DP$ soit triangulaire supérieure.
• Posons alors $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Comme $\det(R) = \det(P)\det(Q) \neq 0$, R est inversible.
En voyant R comme une matrice de changement de base, et en posant donc $\mathcal{C}$ base de E telle que $R = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$, on a, pour tout $u \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{C}}(u) = R^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(u) R &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ 0 & D(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u)P & B(u)Q \\ 0 & D(u)Q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P^{-1}A(u)P & P^{-1}B(u)Q \\ 0 & Q^{-1}D(u)Q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et cette dernière matrice est triangulaire supérieure car $P^{-1}A(u)P$ et $Q^{-1}D(u)Q$ le sont. *On peut alors conclure la propriété annoncée par récurrence...*

35. Dans cette base $\mathcal{C}$, les valeurs propres de u sont les éléments diagonaux de la matrice associée.
Or, comme il existe p tel que $u^p = 0$, si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ, alors

$$u^p(x) = u^{p-1}(u(x)) = u^{p-1}(\lambda x) = \lambda u^{p-1}(x) = \ldots = \lambda^p x,$$

donc, comme $u^p = 0$, on a $\lambda^p x = 0$, donc, comme $x \neq 0$, on a $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.
Par suite, les éléments diagonaux de la matrice associée à u dans la base $\mathcal{C}$ sont nuls, donc cette matrice triangulaire est dans $T_n^+(\mathbb{C})$.

V. Le théorème de Burnside

V.A - Recherche d'un élément de rang 1

Comme $\mathcal{A}$ est irréductible, $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, car tous les sous-espaces vectoriels de E seraient alors stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$.

36. • Soient x un élément non nul de E.
 $F = \{u(x) | u \in \mathcal{A}\}$ est un sous-espace vectoriel car $\mathcal{A}$ en est un. De plus, pour tout $y \in F$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(x)$. Alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(y) = \underbrace{v \circ u}_{\in \mathcal{A}}(x) \in \{f(x) | f \in \mathcal{A}\} = F$. F est donc stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, donc $F = \{0\}$ ou $F = E$.
 • Si $F = \{0\}$, alors, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $u(x) = 0$, donc $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par tous les éléments de $\mathcal{A}$, ce qui est exclu car $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(E)$ et car $\mathrm{Vect}(x) \neq \{0\}$ (car $x \neq 0$).
 • On a donc $F = E$, et, par suite, pour tout $y \in E$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.
37. • Soit x et y dans E tels que la famille $(v(x), v(y))$ soit libre (x et y existent car $\mathrm{rg}(v) \geq 2$). D'après la question précédente, comme $v(x) \neq 0$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $y = u(v(x)) = u \circ v(x)$.
 • Considérons alors $\varphi : z \in \mathrm{Im}(v) \mapsto v \circ u(z) \in \mathrm{Im}(v)$.
 φ est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(v)$, $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension au moins 1, donc φ admet au moins une valeur propre λ. (car son polynôme caractéristique, de degré au moins 1, admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$). Par suite, $\varphi - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(v)}$ n'est pas injective, donc non surjective (endomorphisme en dimension finie), donc $\mathrm{rg}(\varphi) \leq \dim(\mathrm{Im}(v)) - 1 = \mathrm{rg}(v) - 1$.
 • Soit alors $\psi = v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{L}(E)$.
 Comme $\psi = \varphi \circ v$, $\mathrm{rg}(\psi) \leq \min(\mathrm{rg}(\varphi), \mathrm{rg}(v)) \leq \mathrm{rg}(v) - 1$ et, comme $\psi(x) = v \circ u \circ v(x) - \lambda v(x) = v((u \circ v)(x)) - \lambda v(x) = v(y) - \lambda v(x) \neq 0$ (car $(v(x), v(y))$ est une famille libre), donc $\mathrm{rg}(\psi) \geq 1$.
 On a donc bien $0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v)$.
38. Supposons qu'il n'existe pas d'élément de $\mathcal{A}$ de rang 1.
 Posons alors $r = \min\{\mathrm{rg}(u), u \in \mathcal{A} \setminus \{0_{\mathcal{L}(E)}\}\}$, qui existe comme minimum d'un ensemble fini non vide (car $\mathcal{A} \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$).
 Soit alors $v \in E$ tel que $\mathrm{rg}(v) = r$. Alors, en prenant u comme dans la question précédente, $v \circ u \circ v \in \mathcal{A}$ comme composé d'éléments de $\mathcal{A}$, et $v \circ u \circ v - \lambda v \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
 Or $0 < \mathrm{rg}(v \circ u \circ v - \lambda v) < \mathrm{rg}(v) = r$, ce qui est exclu.
 D'où, par l'absurde, il existe $v \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{rg}(v) = 1$.

V.B - Conclusion

39. Comme u_0 est de rang 1, et $u_0(\varepsilon_k) = 0$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $u_0(\varepsilon_1) \neq 0$.
 D'où, d'après la question 36, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, il existe $v_i \in \mathcal{A}$ tel que $v_i(u_0(\varepsilon_1)) = \varepsilon_i$. Alors $u_i = v_i \circ u \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par composition et
 $$u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, n]\!], u_i(\varepsilon_k) = v_i(u_0(\varepsilon_k)) = v_i(0) = 0,$$
 donc $\dim \mathrm{Im}(u_i) = \dim \mathrm{Vect}(u_i(\varepsilon_k)_{k \in [\![1,n]\!]}) = \dim \mathrm{Vect}(u_i(\varepsilon_1)) = 1$, donc u_i est de rang 1 et $u_i(\varepsilon_1) = \varepsilon_i$.
40. On construit maintenant des endomorphismes $u_{i,j}$ dans $\mathcal{A}$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont les $E_{i,j}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 On a déjà construit $u_{i,1} = u_i$ dans la question précédente.
 – Notons $(V_1, \dots, V_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et
 $$G = \left\{x \in E \ : \ \forall u \in \mathcal{A},\ V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(x) = 0\right\}.$$
 – G est un sous-espace vectoriel de E.
 De plus, si $x \in G$, alors, pour tout $v \in \mathcal{A}$, $v(x) \in G$ car pour tout $u \in \mathcal{A}$,
 $$V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(v(x)) = V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(v) Mat_{\mathcal{B}}(x) = V_1^T Mat_{\mathcal{B}} \underbrace{(u \circ v)}_{\in \mathcal{A}} Mat_{\mathcal{B}}(x) \underset{\text{car } x \in G}{=} 0.$$
 Par suite, comme $\mathcal{A}$ est supposée irréductible, on a $G = \{0\}$ ou $G = E$.
 Supposons $G = E$. Soit alors $\varphi : x \in E \mapsto V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(x) \in \mathbb{C}$. φ est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$, donc $K = \mathrm{Ker}\,\varphi = \{x \in E : V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.
 De plus, pour tout $x \in K$, pour tout $u \in \mathcal{A}$, $u(x) \in K$ car
 $$V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u(x)) = V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(u) Mat_{\mathcal{B}}(x) = 0$$
 car $x \in E = G$.
 K est donc un sous-espace vectoriel non tirvial de E stable par $\mathcal{A}$, ce qui est contraire au caractère irréductible de $\mathcal{A}$.
 On a donc $G = \{0\}$.

- Soit à présent $H = \left\{ (Mat_{\mathcal{B}}(u))^T V_1,\ u \in \mathcal{A} \right\}$.
  H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
  Si $H \neq \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, alors on note $p = \dim H < n$ et $H = \mathrm{Vect}\,(W_1, \dots, W_p)$.
  On choisit $X \neq 0$ dans l'intersection d'hyperplans

$$\mathrm{Ker}\,(W_1^T) \cap \mathrm{Ker}\,(W_2^T) \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,(W_p^T)$$

  qui est de dimension $\geq n - p > 0$.
  Alors, en prenant $x \in E$ tel que $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = X$, on a $x \in G$ et $x \neq 0$, ce qui est exclu.
  D'où, par l'absurde, $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
- Comme $H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $w_j \in \mathcal{A}$ tel que $(Mat_{\mathcal{B}}(w_j))^T V_1 = V_j$.
  On a alors $E_{i,j} = V_i V_j^T = V_i V_1^T Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = E_{i,1} Mat_{\mathcal{B}}(w_j) = Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,1} w_j)$, où $u_{i,1} w_j \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par composition.
- Posons alors, pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $u_{i,j} = u_{i,1} w_j$.
  $(u_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$ car $(Mat_{\mathcal{B}}(u_{i,j}))_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
  Par suite, $\mathcal{L}(E) = \mathrm{Vect}\,((u_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}) \subset \mathcal{A}$ comme espace vectoriel engendré par des éléments de $\mathcal{A}$.
  L'inclusion réciproque étant évidente, on a bien l'égalité : $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$.