

I Préliminaires

I.A Quelques propriétés de g_σ

Q 1. Pour tout $\sigma > 0$, la fonction g_σ est définie continue positive sur $\mathbb{R}$.

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 g_\sigma(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 g_\sigma(x)$ donc $g_\sigma(x) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$.

Comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, par théorème de comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} |g_\sigma(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx$ converge. conclusion : g_σ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 2. On considère le changement de variable $t = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ qui est licite car réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2) dt = 1$ conclusion : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) dx = 1$.

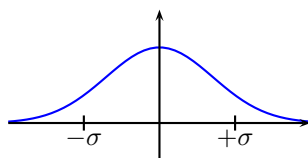
Q 3. La fonction g_σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'_\sigma(x) = -\frac{x}{\sigma^2} g_\sigma(x)$ et $g''_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma^2} \left(-1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right) g_\sigma(x) = \frac{x^2 - \sigma^2}{\sigma^4} g_\sigma(x)$.

On obtient le tableau de variations suivant (avec $g_\sigma(-\sigma) = g_\sigma(\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$):

x	$-\infty$	$-\sigma$	0	σ	$+\infty$				
$g''_{\sigma}(x)$		+	0	-	0	+			
$g'_{\sigma}(x)$	0	$\nearrow$	> 0	$\searrow$	0	$\searrow$	< 0	$\nearrow$	0
$g_{\sigma}(x)$	0	$\nearrow$	$g_{\sigma}(-\sigma)$	$\nearrow$	$g(0)$	$\searrow$	$g_{\sigma}(\sigma)$	$\searrow$	0

La dérivée seconde s'annule en exactement deux points : $-\sigma$ et σ . On obtient la courbe représentative suivante :



I.B

Q 4. $\forall \xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est définie continue sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)| = |f(x)|$.

Comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $x \mapsto f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 5.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$,

- $\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)| \leq |f(x)|$

- f est intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, la fonction $\mathcal{F}(f) : \xi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx$ est définie continue sur $\mathbb{R}$.

conclusion : $\boxed{\mathcal{F}(f) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

I.C

Q 6. f' est intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) dt = \int_0^{+\infty} f'(t) dt$ existe. Or, $\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ existe.

Si $\ell \neq 0$, $|f(x)| \sim_{+\infty} |\ell|$, $\int_0^{+\infty} |\ell| dt$ diverge et $x \mapsto |\ell|$ de signe constant alors, par théorème de comparaison, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ est divergente.

Par contraposition, f intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. De même, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

conclusion : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)}$

Q 7. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \exp(-i 2\pi \xi x)$.

On peut effectuer une intégration par parties en considérant les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$$\begin{cases} u(x) = f(x) & u'(x) = f'(x) \\ v(x) = \exp(-i 2\pi \xi x) & v'(x) = -2i\pi \xi \exp(-i 2\pi \xi x) \end{cases} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) v(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) v(x)$$

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f'(x)}_{\uparrow} \underbrace{\exp(-i 2\pi \xi x)}_{\downarrow} dx = \underbrace{\left[f(x) \exp(-i 2\pi \xi x) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) (-2i\pi \xi \exp(-i 2\pi \xi x)) dx = 2i\pi \xi \mathcal{F}(f)(\xi).$$

conclusion : $\boxed{\mathcal{F}(f')(\xi) = 2i\pi \xi \mathcal{F}(f)(\xi)}$.

I.D

Q 8. L'application $x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2)$ est définie continue positive sur $\mathbb{R}$.

Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \exp(-x^2) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2p} \exp(-x^2)$ donc $x^{2p} \exp(-x^2) = O_{+\infty}(\frac{1}{x^2}) = O_{-\infty}(\frac{1}{x^2})$. Comme $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, par théorème de comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} \exp(-x^2) dx$ converge

conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, x \mapsto x^{2p} \exp(-x^2) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

Q 9. Effectuons une intégration par parties en considérant : $\begin{cases} u(x) = \frac{x^{2p+1}}{2p+1} & u'(x) = x^{2p} \\ v(x) = e^{-x^2} & v'(x) = -2x e^{-x^2} \end{cases}$.

Cette intégration par parties est licite puisque les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) v(x) = 0$.

$$M_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{x^{2p}}_{\uparrow} \underbrace{e^{-x^2}}_{\downarrow} dx = \underbrace{\left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} (-2x) e^{-x^2} dx = \frac{2}{2p+1} M_{p+1}$$

conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, M_{p+1} = \frac{2p+1}{2} M_p}$

Soit l'hypothèse de récurrence : $H_p : M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$

$$\underline{H_0?} \quad M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}(20)!}{2^{20}0!} \Rightarrow H_0$$

$$\underline{H_p \Rightarrow H_{p+1} ?} \quad H_p \Rightarrow M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} \Rightarrow M_{p+1} = \frac{2p+1}{2} \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} = \frac{\sqrt{\pi}(2p+1)!}{2^{2p+1}p!} = \frac{\sqrt{\pi}(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} \Rightarrow H_{p+1}$$

$$\underline{\text{conclusion}} : \quad (H_0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}, H_p \Rightarrow H_{p+1}) \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}, M_p = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$$

Q 10. La fonction cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et $\forall y \in \mathbb{R}, \cos(y) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} y^{2p}$.

$$\text{Pour } y = 2\pi\xi x, \text{ on trouve } \forall x \in \mathbb{R}, \cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} 2^{2p} \pi^{2p} \xi^{2p} x^{2p}$$

$$\underline{\text{conclusion}} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x^2) \cos(2\pi\xi x) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \exp(-x^2) x^{2p} \text{ avec } c_p(\xi) = (-1)^p \frac{2^{2p} \pi^{2p}}{(2p)!} \xi^{2p}$$

$$\mathbf{Q 11.} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \cos(2\pi\xi x) dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \sin(2\pi\xi x) dx$$

La fonction $x \mapsto \exp(-x^2) \sin(2\pi\xi x)$ est impaire intégrable sur $\mathbb{R}$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \sin(2\pi\xi x) dx = 0$.

$$\text{D'où, d'après la question Q 10, } \forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \exp(-x^2) x^{2p} dx.$$

On pose $f_p : x \mapsto c_p(\xi) \exp(-x^2) x^{2p}$.

$\forall p \in \mathbb{N}$, f_p est définie continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (d'après la question 8).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_p(x)| dx = |c_p(\xi)| M_p = \frac{2^{2p} \pi^{2p}}{(2p)!} \xi^{2p} \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!} = \sqrt{\pi} \frac{(\pi^2 \xi^2)^p}{p!}.$$

Comme $\frac{(\pi^2 \xi^2)^p}{p!}$ est le terme général d'une série convergente, on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme et permuter somme et intégrale.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) x^{2p} dx = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p(\xi) M_p$$

$$\Rightarrow \forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \sqrt{\pi} \frac{(\pi^2 \xi^2)^p}{p!} = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 \xi^2)$$

$$\underline{\text{conclusion}} : \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) \exp(-i 2\pi\xi x) dx = \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 \xi^2).$$

Q 12. On effectue le changement de variable $u = \frac{x}{\sqrt{2}\sigma}$ qui est licite car réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \mathbb{R}, \mathcal{F}(g_\sigma)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-i 2\pi\xi x) dx \\ &\stackrel{u=\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}}{=} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) \exp(-i 2\pi\xi \sqrt{2}\sigma u) \sqrt{2}\sigma du \\ &\stackrel{Q11}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} \exp(-\pi^2 (\sqrt{2}\sigma\xi)^2) = \exp\left(\frac{\xi^2}{2 \frac{1}{(2\pi\sigma)^2}}\right) = \underbrace{\sigma' \sqrt{2\pi}}_{=\mu} g_{\sigma'}(\xi) \end{aligned}$$

$$\underline{\text{conclusion}} : \quad \text{Pour } \sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}, \text{ on a } \exists \mu \in \mathbb{R} / \mathcal{F}(g_\sigma) = \mu g_{\sigma'} \text{ (avec } \mu = \sigma' \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}).$$

II Équation de diffusion avec une condition initiale gaussienne

$$\mathbf{Q 13.} \quad \text{Notons } \varphi(t, x) = g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 2t} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + 2t)}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = -\frac{1}{\sigma^2 + 2t} \varphi(t, x) + \frac{x^2}{(\sigma^2 + 2t)^2} \varphi(t, x) = \frac{x^2 - \sigma^2 - 2t}{(\sigma^2 + 2t)^2} \varphi(t, x)$$

En reprenant le calcul effectué à la question Q 3, on trouve :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) = \frac{x^2 - (\sigma^2 + 2t)}{(\sigma^2 + 2t)^2} \varphi(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \Rightarrow \varphi \text{ vérifie i}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(., x) : t \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 2t} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma^2 + 2t)}\right)$ est définie continue sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t, x) = \varphi(0, x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \underset{\sigma > 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = g_\sigma(x) \Rightarrow \varphi \text{ vérifie iii}$

conclusion : La fonction $\varphi : (t, x) \mapsto g_{\sqrt{\sigma^2 + 2t}}(x)$ vérifie i et iii

II.A

Q 14. Soit $t > 0$, soit $T = 2t$. La fonction f vérifie la condition ii, on peut choisir une fonction Φ_T continue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in]0, T[, \forall x \in \mathbb{R}, |f(t, x)| \leq \Phi_T(x)$.

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(t, x) \exp(-2i\pi\xi x)| = |f(t, x)| \leq \Phi_T(x)$$

Par théorème de comparaison, l'intégrabilité de Φ_T sur $\mathbb{R}$ entraîne l'intégrabilité de $x \mapsto f(t, x) \exp(-2i\pi\xi x)$ sur $\mathbb{R}$

conclusion : $\forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(t, x) \exp(-2i\pi\xi x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q 15. remarque : La notation $\widehat{g_\sigma}(\xi)$ n'est pas cohérente et doit être interprétée comme $\mathcal{F}(g)(\xi)$ ce qui a dû gêner les étudiants les plus rigoureux.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers zéro.

Soit $f_n : x \mapsto f(t_n, x) \exp(-i2\pi\xi x)$.

La suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc bornée. Soit $T > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in]0, T[$.

La fonction f vérifie la condition ii, on peut choisir une fonction Φ_T continue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$\forall t \in]0, T[, \forall x \in \mathbb{R}, |f(t, x)| \leq \Phi_T(x)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_n \in]0, T[\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = |f(t_n, x)| \leq \Phi_T(x)$$

La fonction f vérifie la condition iii donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto g_\sigma(x) \exp(-i2\pi\xi x)$ sur $\mathbb{R}$.

Toutes les conditions d'application du théorème de convergence dominée sont satisfaites, donc :

- La suite $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx}_{= \hat{f}(t_n, \xi)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_\sigma(x) \exp(-i2\pi\xi x) dx = \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$

On a donc pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers zéro, la suite $(\hat{f}(t_n, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g_\sigma(\xi)$.

conclusion : Par caractérisation séquentielle des limites, on a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

Q 16. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Soit $T > 0$, soit $t \in]0, T[$.

La fonction f vérifiant la condition ii, on choisit Ψ_T continue intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]0, T[, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq \Psi_T(x)$$

Posons $\varphi : (t, x) \mapsto f(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x)$

- Pour tout réel $t \in]0, T[$, la fonction $\varphi(t, \cdot) : x \mapsto f(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est continue, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question Q 14.
- Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi(\cdot, x) : t \mapsto f(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, T[$,
- $\forall t \in]0, T[, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq \Psi_T(x)$
- Ψ_T intégrable sur $\mathbb{R}$

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, l'application $\hat{f}(\cdot, x) : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, T[$ de dérivée $t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx$.

La résultat étant valable pour tout T strictement positif, on peut conclure.

$$\text{conclusion : } \forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx.$$

Q 17. On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx = \mathcal{F} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right) (\xi)$

La fonction f vérifiant la condition i, on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \exp(-i 2\pi \xi x) dx \\ &= \mathcal{F} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot) \right) (\xi) \underbrace{=}_{\text{condition i}} \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, \cdot) \right) (\xi) \\ &\underbrace{=}_{Q7.} 2i\pi\xi \mathcal{F} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \cdot) \right) (\xi) \underbrace{=}_{Q7.} (2i\pi\xi)^2 \mathcal{F} (f(t, \cdot)) (\xi) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(t, \xi) \end{aligned}$$

$$\text{conclusion : } \forall t > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \hat{f}(t, \xi).$$

II.B

Q 18. D'après la question Q 17, pour ξ fixé, l'application $t \mapsto \hat{f}(t, \xi)$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constant $y' + 4\pi^2 \xi^2 y = 0$. Elle est donc de la forme $t \mapsto Cste \exp(4\pi^2 \xi^2 t)$, la constante $Cste$ étant fonction de ξ , a priori complexe.

Comme $Cste = \lim_{t \rightarrow 0^+} Cste \exp(4\pi^2 \xi^2 t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) \underbrace{=}_{Q15} \widehat{g_\sigma}(\xi)$, on en déduit $Cste \in \mathbb{R}$.

$$\text{conclusion : } \forall \xi \in \mathbb{R}, \exists K(\xi) \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}_+, \hat{f}(t, \xi) = K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t).$$

Q 19. D'après la question Q 15, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$.

Et d'après la question Q 18, $\forall \xi \in \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \hat{f}(t, \xi) = \lim_{t \rightarrow 0^+} K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t) = K(\xi)$. conclusion $K(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$

II.C

Q 20. D'après la question Q 12, $\mathcal{F}(g)(\xi) = \widehat{g_\sigma}(\xi)$ est de la forme $\mu g_{\sigma'}(\xi)$ avec $\sigma' = \frac{1}{2\pi\sigma}$ et $\mu = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

On a donc $\widehat{g_\sigma}(\xi) = \mu g_{\sigma'}(\xi) = \frac{1}{\sigma' \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma'}\right) = \mu \sqrt{2\pi} \sigma \exp(-2\pi^2 \sigma^2 x^2)$
 $\Rightarrow \hat{f}(t, \xi) = K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t) = \widehat{g_\sigma}(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t) = \mu \sqrt{2\pi} \sigma \exp(-2\pi^2 \sigma^2 \xi^2) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t)$
 $\Rightarrow \hat{f}(t, \xi) = K(\xi) \exp(-4\pi^2 \xi^2 t) = \mu \sqrt{2\pi} \sigma \exp(-2\pi^2 (\sigma^2 + 2t) \xi^2)$

conclusion : $\boxed{\text{Pour } \nu_\sigma = \mu \sqrt{2\pi} \sigma, \text{ on a : } \forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \hat{f}(t, \xi) = \nu_\sigma \exp(-2\pi^2 (\sigma^2 + 2t) \xi^2)}$

Q 21. $\nu_\sigma = \mu \sqrt{2\pi} \sigma \underbrace{=}_{Q12} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \sigma = 1.$ conclusion : $\boxed{\nu_\sigma = 1}$.

Q 22. $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = \mu g_{\sigma'}(\xi)$ avec $\sigma' = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma^2 + 2t}}$
 $\widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) = \mu \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + 2t} \exp(-\pi^2 (\sigma^2 + 2t) \xi^2)$
 $\Rightarrow \hat{f}(t, \xi) = \nu_\sigma \exp(-\pi^2 (\sigma^2 + 2t) \xi^2) = \frac{\nu_\sigma}{\mu \sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + 2t}} \widehat{g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}(\xi) \Rightarrow \mathcal{F}f(t, \cdot) = \lambda_{\sigma,t} \mathcal{F}(g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}).$

Par linéarité de l'intégrale, on vérifie aisément que la fonction $f \mapsto \mathcal{F}(f)$ est linéaire sur l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}$.

On a donc $\mathcal{F}(f(t, \cdot)) = \mathcal{F}(\lambda_{\sigma,t} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}})$ et d'après le résultat admis $f(t, \cdot) = \lambda_{\sigma,t} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}$.

conclusion : $\boxed{\forall t > 0, \exists \lambda_{t,\sigma} \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(t, \cdot) = \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}$

Q 23. D'après la question Q 17, avec $\xi = 0$, on a $\forall t > 0, \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, 0) = 0.$

On remarque que $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = \hat{f}(t, 0).$

Or $\forall t > 0, \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(t, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(t+\varepsilon) - \hat{f}(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I(t+\varepsilon) - I(t)}{\varepsilon} = I'(t)$

$\Rightarrow \forall t > 0, I'(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\text{la fonction } I : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx \text{ est constante sur l'intervalle }]0, +\infty[}$

Q 24. Soit $t > 0.$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx \underbrace{=}_{Q22} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_{t,\sigma} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) dx = \lambda_{t,\sigma} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}(x) dx}_{=1 \text{ (d'après la question Q 2)}}$

$\Rightarrow \lambda_{t,\sigma} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = \hat{f}(t, 0) \underbrace{=}_{Q20} \nu_\sigma \underbrace{=}_{Q21} 1 \Rightarrow f(t, \cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}.$ conclusion : $\boxed{\forall t > 0, f(t, \cdot) = g_{\sqrt{\sigma^2+2t}}}$.

III Étude numérique

III.A

Q 25. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$, par définition de $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ et l'hypothèse i sur f , on a :

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[, \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{f(t+\theta, x) - f(t, x)}{\theta} = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)}$

Q 26. $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f(t, \cdot) : x \mapsto f(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[$. D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en x ,

on a :
$$\begin{cases} f(t, x+h) = f(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\ f(t, x-h) = f(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) h + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) \frac{h^2}{2} + o(h^2) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) h^2 + o(h^2) \Rightarrow \frac{f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + o(1)$

conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in]0, 1[, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t, x+h) - 2f(t, x) + f(t, x-h)}{h^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x)}$.

III.B

Q 27. $\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \frac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\tau} = \frac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$
 $\Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, f_{n+1}(k) - f_n(k) = \underbrace{\frac{\tau}{\delta^2}}_{=r} (f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1))$
 $\Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, f_{n+1}(k) = r(f_n(k+1) + f_n(k-1)) + (1-2r)f_n(k)$
 $\Rightarrow \underbrace{f_n(0)=0}_{f_n(q+1)=0} \Rightarrow \begin{cases} f_{n+1}(1) &= r f_n(2) + (1-2r) f_n(1) \\ f_{n+1}(2) &= r f_n(1) + r f_n(3) + (1-2r) f_n(2) \\ &\vdots \\ f_{n+1}(q-1) &= r f_n(q-2) + r f_n(q) + (1-2r) f_n(q-1) \\ f_{n+1}(q) &= r f_n(q-1) + (1-2r) f_n(q) \end{cases}$
 $\Rightarrow F_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1}(1) \\ \vdots \\ f_{n+1}(q) \end{pmatrix} = r B \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} + (1-2r) \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix} \Rightarrow F_{n+1} = r B F_n + (1-2r) F_n = \underbrace{(rB + (1-2r)I_q)}_{=A} F_n$
conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = A F_n$.

Q 28. Les matrices A et B sont symétriques réelles donc d'après le théorème spectral elles sont diagonalisables.
Par récurrence immédiat, à l'aide de la relation $F_{n+1} = A F_n$, on a $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_n = A^n F_0}$.

Q 29. Pour la suite, on rappelle que si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n X = \lambda^n X.$$

$\Rightarrow$: Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre (non nul) associé. On considère $F_0 = X$.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = A^n F_0 = A^n X = \lambda^n X \Rightarrow \|F_n\| = |\lambda|^n \|X\|$.

Si $|\lambda| > 1$ alors $\|F_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Par contraposition, si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite bornée alors $|\lambda| \leq 1$.

$\Leftarrow$: On suppose $\text{Sp}(A) \subset [-1, 1]$.

La matrice A est diagonalisable. On peut choisir $(X_1, \dots, X_q)$ une base de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A .
Notons λ_i la valeur propre associé au vecteur propre X_i .

Soit $F_0 \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_q) \in \mathbb{R}^q / F_0 = \sum_{i=1}^q \alpha_i X_i$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = A^n F_0 = A^n \sum_{i=1}^q \alpha_i X_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i A^n X_i = \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda_i^n X_i$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \|F_n\| = \left\| \sum_{i=1}^q \alpha_i \lambda_i^n X_i \right\| \leq \sum_{i=1}^q |\alpha_i| \underbrace{|\lambda_i^n|}_{\leq 1} \|X_i\| \leq \sum_{i=1}^q |\alpha_i| \|X_i\| \Rightarrow (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est une suite bornée.}$$

conclusion $\boxed{\text{la suite } (F_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée quel que soit le choix de } F_0 \text{ si et seulement si } \text{Sp}(A) \subset [-1, 1]}$.

Q 30. $\lambda Y = B Y \iff \begin{cases} \lambda y_1 &= y_2 \\ \lambda y_2 &= y_1 + y_3 \\ &\vdots \\ \lambda y_{q-1} &= y_{q-2} + y_q \\ \lambda y_q &= y_{q-1} \end{cases} . \text{ Soit } i_0 \in \llbracket 1, q \rrbracket \text{ tel que } |i_0| = \max\{|y_i| / 1 \leq i \leq q\}.$

On a : $\begin{cases} \lambda y_{i_0} = y_2 & \text{si } i_0 = 1 \\ \lambda y_{i_0} = y_{i_0-1} + y_{i_0+1} & \text{si } i_0 \in \llbracket 2, q-1 \rrbracket \\ \lambda y_{i_0} = y_{q-1} & \text{si } i_0 = q \end{cases}$. Dans tous les cas de figure, on a $|\lambda| |y_{i_0}| \leq 2 |y_{i_0}|$.

Comme $Y \neq 0 \Rightarrow y_{i_0} \neq 0 \Rightarrow |\lambda| \leq 2 \underbrace{\Rightarrow}_{\lambda \in \mathbb{R}} \boxed{\lambda \in [-2, 2]}$.

$\frac{\lambda}{2} \in [-1, 1]$ et la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$, donc $\exists \theta \in [0, \pi] / \frac{\lambda}{2} = \cos(\theta)$.

conclusion : $\boxed{\exists \theta \in [0, \pi], \text{ tel que } \lambda = 2 \cos \theta}$

Q 31. Si on impose $y_0 = y_{q+1} = 0$, alors :

$$\lambda Y = BY \iff \begin{cases} \lambda y_1 = y_2 = y_0 + y_2 \\ \lambda y_2 = y_1 + y_3 \\ \vdots \\ \lambda y_{q-1} = y_{q-2} + y_q \\ \lambda y_q = y_{q-1} = y_{q-1} + y_{q+1} \end{cases} \iff \boxed{\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0}.$$

Q 32. La famille $(y_k)_{k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket}$ vérifie la relation de récurrence à deux termes $y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0$ ($\mathcal{R}$) d'équation caractéristique $X^2 - \lambda X + 1 = 0$.

$$X^2 - \lambda X + 1 = 0 \iff X^2 - 2 \cos(\theta) X + 1 = 0 \iff (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = 0.$$

D'après les propriétés sur les suites récurrentes, $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 / \forall k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket, \begin{cases} y_k = \alpha e^{k\theta} + \beta e^{-k\theta} & \text{si } \theta \in]0, \pi[\\ y_k = (\alpha + k\beta) e^{-k\theta} & \text{si } \theta \in \{0, \pi\} \end{cases}$

cas $\theta \in \{0, \pi\}$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{q+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ (\alpha + (q+1)\beta) e^{(q+1)\theta} = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket, y_k = 0 : \text{absurde car } Y \neq 0.$$

cas $\theta \in]0, \pi[$

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_{q+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{(q+1)\theta} + \beta e^{-(q+1)\theta} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Les y_i n'étant pas tous nuls, on a $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc le système (*) n'est pas un système de Cramer, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{(q+1)\theta} & e^{-(q+1)\theta} \end{vmatrix} = 0 \iff e^{-(q+1)\theta} - e^{(q+1)\theta} = 0 \iff \sin((q+1)\theta) = 0 \iff \underbrace{\exists j \in \llbracket 1, q \rrbracket / \theta = \frac{j\pi}{q+1}}_{\theta \in]0, \pi[}.$$

$$\text{conclusion : } \boxed{\exists j \in \llbracket 1, q \rrbracket \text{ tel que } \lambda = 2 \cos \frac{j\pi}{q+1}}.$$

Q 33. La question 32 nous donne $\text{Sp}(B) \subset \left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}$.

Soit $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et $\lambda_j = 2 \cos \frac{j\pi}{q+1}$.

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé, d'après la question 32, on peut trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$\forall k \in \llbracket 0, q+1 \rrbracket, y_k = \alpha e^{k\theta} + \beta e^{-k\theta}$. Cette formule restant valable avec $y_0 = 0$, on a donc $\beta = -\alpha$.

Si on prend $\alpha = -\beta = 1$, alors $y_k = \sin \left(\frac{kj\pi}{q+1} \right)$ vérifie la relation de récurrence ($\mathcal{R}$) et d'après l'équivalence établie

à la question 31, le vecteur $Y_j = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ est un vecteur propre (non nul) de B associé à λ_j .

On a prouvé que tous les λ_j sont valeurs propres. Comme les q valeurs propres sont distinctes deux à deux et que $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ est de dimension q , la famille $(Y_1, \dots, Y_q)$ est une base de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$.

$$\text{conclusion : } \boxed{\begin{aligned} &\text{Sp}(B) = \left\{ 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\} \\ &\text{La famille } \left(\begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{q+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{q\pi}{q+1}) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sin(\frac{k\pi}{q+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{kq\pi}{q+1}) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sin(\frac{q\pi}{q+1}) \\ \vdots \\ \sin(\frac{q^2\pi}{q+1}) \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{q,1} \text{ formée de vecteurs} \\ &\text{propres de } B. \end{aligned}}$$

Q 34. Tout vecteur propre de B est vecteur propre de I_q et si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ alors X est vecteur propre de $A = (1-2r)I_q + rB$ associé à la valeur propre $(1-2r) + r\lambda$. On en déduit que l'ensemble des valeurs propres de A est :

$$\text{Sp}(A) = \{(1-2r) + r\lambda / \lambda \in \text{Sp}(B)\} = \left\{ (1-2r) + 2 \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\} = \left\{ (1-2r)(1 - \cos \left(\frac{j\pi}{q+1} \right)) / j \in \llbracket 1, q \rrbracket \right\}$$

Par décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$, on a

$$\max(\text{Sp}(A)) = (1 - 2r(1 - \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right))) \text{ et } \min(\text{Sp}(A)) = (1 - 2r(1 - \cos\left(\frac{q\pi}{q+1}\right)))$$

D'après la question Q 29, la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée quels que soient les choix de q et de F_0 si et seulement si

$$\begin{aligned} \text{Sp}(A) \subset [-1, 1] &\iff -1 \leq \min(\text{Sp}(A)) \leq \max(\text{Sp}(A)) \leq 1 \\ &\iff -1 \leq (1 - 2r(1 - \cos\left(\frac{q\pi}{q+1}\right))) \text{ et } (1 - 2r(1 - \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right))) \leq 1 \\ &\iff r(1 - \cos\left(\frac{q\pi}{q+1}\right)) \leq 1 \text{ et } \underbrace{-2r(1 - \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right)) \leq 0}_{\text{toujours vrai}} \\ &\iff r(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right)) \leq 1 \iff r \leq \frac{1}{(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right))} (*) \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel q , $\frac{1}{(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right))} \geq \frac{1}{2}$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q+1}\right))} = \frac{1}{2}$.

L'inégalité (*) est satisfaite pour tout entier q si et seulement si $r \leq \frac{1}{2}$

conclusion :

La suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée quels que soient les choix de q et de F_0 si et seulement $r \leq \frac{1}{2} \iff \frac{\tau}{\delta^2} \leq \frac{1}{2}$.

IV Équation de diffusion et marche aléatoire

IV.A

Q 35. $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$. conclusion : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

Les variables aléatoires X_n étant mutuellement indépendantes, il en est de même pour les variables aléatoires $Y_n = f(X_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + 1)$.

Z_n est donc la somme de n variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc Z_n suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$. conclusion : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$

Q 36. $\forall \omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{j=1}^n X_j(\omega)$ avec $X_j(\omega) \in \{-1, 1\}$. On a donc $S_n(\omega)$ pair si n pair et impair si n est impair.

Si n et k n'ont pas la même parité alors l'événement $(S_n = k)$ est impossible.

conclusion : si n et k ne sont pas de même parité, alors $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$.

Q 37. Soit n et k deux entiers de même parité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n = k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n X_j = k\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n (2Y_j - 1) = k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(2 \sum_{j=1}^n Y_j = k + n\right) = \mathbb{P}(2Z_n = k + n) \\ &= \mathbb{P}\left(Z_n = \frac{k+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \frac{1}{2^n} \quad (\text{car } Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})) \end{aligned}$$

conclusion : si n et k sont de même parité, $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} \frac{1}{2^n}$.

IV.B

Q 38. On utilise les propriétés de la variance $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) &= \delta^2 \mathbb{V}(S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \mathbb{V}(2Z_{\lfloor 1/\tau \rfloor} - n) = 4\delta^2 \mathbb{V}(Z_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = 4\delta^2 \mathbb{V}\left(\sum_{j=1}^{\lfloor 1/\tau \rfloor} Y_j\right) \\ &\stackrel{(*)}{=} \underbrace{4\delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor}_{=1/4} \underbrace{\mathbb{V}(Y_1)}_{=1/4} = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor \end{aligned}$$

(*) : Les Y_j sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la même loi.

$$\text{conclusion : } \boxed{\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor}$$

Q 39. $\forall \tau > 0, \frac{1}{\tau} - 1 \leq \lfloor 1/\tau \rfloor \leq \frac{1}{\tau} \Rightarrow 1 - \tau \leq \frac{\lfloor 1/\tau \rfloor}{\frac{1}{\tau}} \leq 1 \Rightarrow \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\lfloor 1/\tau \rfloor}{\frac{1}{\tau}} = 1$

$$\Rightarrow \lfloor 1/\tau \rfloor \sim_{0^+} \frac{1}{\tau} \Rightarrow \mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) = \delta^2 \lfloor 1/\tau \rfloor \sim_{0^+} \frac{\delta^2}{\tau}.$$

$$\text{conclusion : } \boxed{\mathbb{V}(\delta S_{\lfloor 1/\tau \rfloor}) \sim_{0^+} \frac{\delta^2}{\tau}}$$

Q 40.

$((X_{n+1} = -1), (X_{n+1} = 1))$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1}(k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid X_{n+1} = 1) \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)}_{=1/2} + \mathbb{P}(S_{n+1} = k \mid X_{n+1} = -1) \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = -1)}_{1/2} \quad (*)$$

Or, $(S_{n+1} = k \cap X_{n+1} = 1) = \left(\sum_{j=1}^{n+1} X_j = k \cap X_{n+1} = 1 \right) = \left(\sum_{j=1}^n X_j = k \right) = (S_n = k - 1)$ et de même, on trouve $(S_{n+1} = k \cap X_{n+1} = -1) = (S_n = k + 1)$

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow p_{n+1}(k) = \frac{1}{2} (\mathbb{P}(S_n = k + 1) + \mathbb{P}(S_n = k - 1)) = \frac{\delta^2}{2} \frac{p_n(k + 1) + p_n(k - 1)}{\delta^2} \\ &\Rightarrow \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{p_{n+1}(k)}{\tau} - \frac{p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k + 1) + p_n(k - 1)}{\delta^2} - \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k)}{\delta^2} \\ &\Rightarrow \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k + 1) - 2p_n(k) + p_n(k - 1)}{\delta^2} \end{aligned}$$

$$\text{conclusion : } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{p_{n+1}(k) - p_n(k)}{\tau} = \frac{\delta^2}{2\tau} \frac{p_n(k + 1) - 2p_n(k) + p_n(k - 1)}{\delta^2}}$$

Q 41. Je ne trouve pas de réponse satisfaisante à cette question, j'attends des suggestions des lecteurs avertis.