CCINP PC 2020 - Corrigé

EXERCICE 1 : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Partie I - Préliminaires

1. Soit $x > 0$.
   $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ par opérations sur les fonctions usuelles.
   Pour tout $t > 0$, $|\sin(t)| \leq |t|$, donc $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t} e^{-xt}\right| \leq e^{-xt}$.
   Or $t \mapsto e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $x > 0$), donc, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. • Posons $u'(t) = \sin(t)$, $u(t) = 1 - \cos(t)$, $v(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $u(t)v(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t} = \dfrac{t}{2} + o(t) \underset{t\to 0}{\to} 0$.
   $u(t)v(t) = \dfrac{\overbrace{1-\cos(t)}^{\text{borné}}}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.
   D'où, par intégration par parties, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt = -\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ sont de même nature, donc I converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge.
   • $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1-(1-t^2/2+o(t^2)}{t^2} = \dfrac{t^2/2+o(t^2}{t^2} = \dfrac{1}{2} + o(1) \underset{t\to 0}{\to} 1/2$, donc $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,1]$.
   $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{O(1)}{t^2} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$), donc, par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc, en particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}dt$ converge, donc, d'après le premire point de cette question, I converge.
3. Soit $x \geq 0$.
   $t \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $t > 0$,
   $$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= -\frac{x\cos(t)-\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} - \frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2} \times (-x)e^{-xt} \\ &= \frac{-x\cos(t)+\sin(t)+x^2\sin(t)+x\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt} \\ &= \frac{(1+x^2)\sin(t)}{1+x^2}e^{-xt} = \sin(t)e^{-xt},\end{aligned}$$
   donc $t \mapsto u(x,t)$ est bien une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II - Calcul de F sur $]0,+\infty[$

4. • Soit $x > 0$.
   Pour tout $t > 0$, $|f(x,t)| = \left|\dfrac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq e^{-xt}$.
   D'où, par l'inégalité triangulaire généralisée et par positivité de l'intégrale convergente (avec "$0 \leq +\infty$"), on a :
   $$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty} f(x,t)dt\right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x,t)|dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}.$$
   • Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes,
   $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$
5. Soit $a > 0$.
   — Pour tout $x \in [a,+\infty[$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (d'après la question 1 avec $x \geq a > 0$).

— Pour tout $t>0$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ (constante fois une exponentielle) et, pour tout $x\geq a$,

$$t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\sin(t)e^{-xt}$$

est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Pour tout $x\geq a$, pour tout $t>0$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=|-\sin(t)e^{-xt}|\leq e^{-xt}\leq e^{-at}=\varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $a>0$).

D'où, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $F:x\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et, pour tout $x\geq a$,

$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt=-\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt.$$

6. F est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, donc F est dérivable sur $\bigcup_{a>0}[a,+\infty[=]0,+\infty[$ et, pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}F'(x)&=-\int_0^{+\infty}\sin(t)e^{-xt}dt=-[u(x,t)]_0^{+\infty}=-\left(0+\frac{1}{1+x^2}\right)\\&=-\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

F est une primitive de F' sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, donc il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $x>0$,

$$F(x)=-\arctan(x)+K.$$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$, donc $-\frac{\pi}{2}+K=0$, donc $K=\frac{\pi}{2}$, et, par suite, pour tout $x>0$,

$$F(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x).$$

Partie III - Conclusion

7. — Pour tout $t\in]0,1]$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.

— Pour tout $x\in[0,1]$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1]$.

— Pour tout $t\in]0,1]$, pour tout $x\in[0,1]$,

$$|f(x,t)|=\left|\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right|\leq e^{-xt}\leq 1=\varphi(t),$$

où φ est intégrable sur $]0,1]$ (constante sur un intervalle borné).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $F_1:x\mapsto\int_0^1 f(x,t)dt$ est continue sur $[0,1]$.

8. Soit $x\in[0,1]$.

• Pour tout $t\geq 1$,

$$\frac{u(x,t)}{t^2}=\frac{1}{t^2}\times\left(-\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}e^{-xt}\right)=\frac{1}{t^2}\times\underset{t\to+\infty}{O}(1)=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t\mapsto\frac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc, en particulier, $\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge.

• Posons $w'(t)=\sin(t)e^{-xt}$, $w(t)=u(x,t)$, $v(t)=\frac{1}{t}$, $v'(t)=-\frac{1}{t^2}$.

w et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$.

$w(t)v(t)=\frac{u(x,t)}{t}=\underset{t\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{t}\right)\underset{t\to+\infty}{\to}0.$

$\int_1^{+\infty}w(t)v'(t)dt=-\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt$ converge d'après le premier point.

D'où, par intégration par parties, $\int_1^{+\infty}f(x,t)dt=\int_1^{+\infty}w'(t)v(t)dt$ converge (mais on le savait déjà) et

$$\begin{aligned}F_2(x)&=\int_1^{+\infty}u'(t)v(t)dt=\left[\frac{u(x,t)}{t}\right]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt\\&=\frac{x\sin(1)+\cos(1)}{1+x^2}e^{-x}+\int_1^{+\infty}\frac{u(x,t)}{t^2}dt.\end{aligned}$$

9. •
— Pour tout $x \in [0,1]$, $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1,+\infty[$.
— Pour tout $t \geq 1$, $x \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[0,1]$.
— Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $t \geq 1$,

$$\left|\frac{u(x,t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}\frac{x|\sin(t)| + |\cos(t)|}{1+x^2}e^{-xt} \leq \frac{1}{t^2}\frac{1+1}{1} \times 1 = \frac{2}{t^2} = \varphi(t)$$

où φ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2 > 1$).

D'où, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}dt$ est continue sur $[0,1]$.

• De plus, $x \mapsto \dfrac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ (par opérations sur les fonctions usuelles), donc F_2 est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.

10. • D'où, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ existe (on le savait déjà, cf 1 et 2) et

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)dt + \int_1^{+\infty} f(x,t)dt = F_1(x) + F_2(x),$$

donc $F = F_1 + F_2$, donc F est continue sur $[0,1]$ comme somme de fonctions continues.
• On a donc, par continuité de F en 0,

$$I = F(0) = \lim_{x\to 0^+} F(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE 2 : Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

Partie I - Etude d'un exemple

1. $\|\cdot\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc $\varphi : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 - \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie.
Par suite, $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 - \|x\| \geq 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
De plus, $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ est borné.
Enfin, $f : (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ est polynomiale en ses coordonnés, donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
D'où, d'après le théorème des bornes atteintes, $f$admet un maximum et un minimum sur B_2.
On obtient de la même façon que B_n est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, mais fallait-il le démontrer, puisque c'est du cours (car B_n est la boule unité fermée pour $\|\cdot\|$) ?

2. • Pour tout $(x_1,x_2) \in S^2$, il existe $t \in [0,2\pi]$ tel que $(x_1,x_2) = (\cos(t),\sin(t))$.
• Posons $h : t \in [0,2\pi] \mapsto f(\cos(t),\sin(t)) = \cos^2(t) + \sin^2(t) + 4\cos(t)\sin(t) = 1 + 2\sin(2t)$.
D'après les variations de la fonction sin, on a :

t	0		$\pi/4$		$3\pi/4$		$5\pi/4$		$7\pi/4$		2π
$h(t)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

donc h a pour maximum 3 et pour minimum -1, donc f a pour maximum 3 et pour minimum -1 sur la frontière S_2.

3. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car polynomiale et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + 4y \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2y + 4x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(x,y) \in B_2' \text{ point critique de } f &\Leftrightarrow \nabla f(x,y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 0 \\ 2y + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.\end{aligned}$$

f admet donc un unique point critique sur B_2', le point $(0,0)$.

4. f possède un maximum et un minimum sur B_2 d'après la question 1
Ce maximum peut être atteint sur S_2, et donc valoir 3, où en un point critique de B_2' (qui est un ouvert), donc en $(0,0)$. Or $f(0,0) = 0$, donc le maximum de f sur B_2 est 3, atteint sur S_2 (et plus précisément en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$). De même, le minimum peut être atteint sur S_2, et donc valoir -1, où en un point critique de B_2', donc en $(0,0)$. Or $f(0,0) = 0$, donc le minimum de f sur B_2 est -1, atteint sur S_2 (et plus précisément en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

5. On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\chi_{M_f}(X) = (X-1)^2 - 4 = (X-3)(X+1),$$

donc $\mathrm{Sp}(M_f) = \{-1, 3\}$ et on a donc bien la propriété demandée.

Partie II - Le cas général

6. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $(M_f X)_i = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} (X)_j = \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_j$, donc

$$\begin{aligned}
X^T M_f X &= \sum_{i=1}^{n} (X^T)_i (M_f X)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (M_f)_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_f)_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (M_f)_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (M_f)_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j + \sum_{1 \le j < i \le n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j + \sum_{1 \le j < i \le n} \frac{m_{j,i}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \frac{m_{i,j}}{2} x_i x_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j \\
&= \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{i,j} x_i x_j = f(x).
\end{aligned}$$

7. M_f est symétrique réelle, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
8. On a $X = PY$, donc

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = X^T X = (PY)^T (PY) = Y^T P^T P Y \underset{P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}{=} Y^T I_n Y = Y^T Y.$$

9. • Posons $Y = (y_1, \ldots, y_n)^T P^{-1} X$. Alors, d'après la question précédente, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = Y^T Y = \|x\|^2 \le 1$ et, comme

$$Y^T D Y = Y^T \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

on a

$$\begin{aligned}
Y^T D Y &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2 \quad (\text{car pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \le \lambda_n \text{ et } y_i^2 \ge 0) \\
&= \underbrace{\lambda_n}_{\ge 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{\le 1} \le \lambda_n \\
\text{et} \quad Y^T D Y &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \ge \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 y_i^2 \quad (\text{car pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \ge \lambda_1 \text{ et } y_i^2 \ge 0) \\
&= \underbrace{\lambda_1}_{\le 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}_{\le 1} \ge \lambda_1,
\end{aligned}$$

donc on a bien $\lambda_1 \le Y^T D Y \le \lambda_n$.

• Or, pour tout $x \in B_2$, comme P est orthogonale,

$$f(x) = X^T M_f X = X^T P D P^T X = (P^T X)^T D (P^T X) = (P^{-1} X)^T D (P^{-1} X) = Y^T D Y \in [\lambda_1, \lambda_n],$$

donc on a bien l'encadrement demandé.

10. Supposons $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$.

• Soit X_1 un vecteur propre unitaire (quitte à le normaliser) de M_f associé à la valeur propre λ_1 et $x_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_1^T = X_1$. Alors :

— $\|x_1\| = \|X_1\| = 1$, donc $x_1 \in B_n$
— $f(x_1) = X_1^T M_f X_1 = X_1^T \lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_1^T X_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1$.
On a, pour tout $x \in B_n$, $f(x) \geq \lambda_1$ et $f(x_1) = \lambda_1$, donc on a bien $\min\limits_{B_n}(f) = \lambda_1$, *et ce minimum est atteint en* x_1.

• On procède de même pour le maximum en prenant cette fois un vecteur propre unitaire de M_f associé à la valeur propre λ_n.

11. Supposons $\lambda_1 \geq 0$.
• Alors, pour tout $x \in B_n$, en gardant les notations de cette partie, on a

$$f(x) = X^T M_f X = Y^T D Y = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{x_i^2}_{\geq 0} \geq 0,$$

et, comme $f((0,\ldots,0)) = 0$, on a $\min\limits_{B_n}(f) = 0$, atteint pour $x = 0$.

• L'étude faite sur le majorant dans les 2 questions précédentes reste valable ici, donc on a $\max\limits_{B_n}(f) = \lambda_n$.

Si on a $\lambda_n \leq 0$, *on aura de façon similaire* $\max\limits_{B_n}(f) = 0$ *et* $\min\limits_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Partie III - Application des résultats

12. On a $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $M_f - 2I_n = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}$, donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) \leq 1$ (car toutes les colonnes de $M_f - 2I_n$ sont identiques) et $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) \geq 1$ (car ce n'est pas la matrice nulle), donc $\mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = 1$.
D'où, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Ker}\,(M_f - 2I_n) = n - \mathrm{rg}(M_f - 2I_n) = n - 1 \neq 0,$$

donc 2 est valeur propre de M_f et $E_2(M_f) = \mathrm{Ker}\,(m_f - 2I_n)$ est de dimension $n-1$.
Comme M_f est diagonalisable, on en déduit :
— 2 est valeur propre de M_f de multiplicité exactement $n-1$.
— M_f a exactement n valeurs propres, comptées avec multiplicité, donc il reste une dernière valeur propre, que l'on note λ.
— χ_{M_f} est scindé, donc la trace de M_f est égale à la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc :

$$n = \mathrm{tr}(M_f) = 2(n-1) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = -n + 2.$$

On a donc $\mathrm{Sp}\,(f) = \{-n+2, 2\}$, et, comme $-n+2 < 0$ et $2 > 0$, on a :

$$\min_{B_n}(f) = -n + 2 \quad \text{et} \quad \max_{B_n}(f) = 2.$$

Rq : Pour trouver la dernière valeur propre de M_f, *on aurait aussi pu remarquer que la somme sur chaque ligne de* M_f *vaut* $-n+2$, *donc que* $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre de* M_f *associé à la valeur propre* $2-n$, *et un argument sur les dimensions des espaces propres permet alors de conclure qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, et donc que* $\mathrm{Sp}\,(M_f) = \{-n+2, 2\}$.

EXERCICE 3 : Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Partie I - Calcul de p_n

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Chaque variable X_k modélise le pas de l'instant k, donc $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ modélise la positition du pion à l'instant n.
Comme $S_0 = 0$, S_0 modélise aussi la position du pion à l'instant 0.

2. $p_0 = P(S_0 = 0) = 1$. Comme $S_1(\Omega) = X_1(\Omega) = \{\pm 1\}$, on a $p_1 = P(S_1 = 0) = 0$. Enfin, $p_2 = P(S_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0)$.
D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_1 = k)_{k \in X_1(\Omega)} = (X_1 = -1, X_1 = 1)$, on a

$$\begin{aligned} p_2 = P(X_1 + X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \cap X_1 + X_2 = 0) + P(X_1 = -1 \cap X_1 + X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = -1) + P(X_2 = -1 \cap X_1 = 1) \\ &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Si n est impair, alors pour tout $\omega \in \Omega$, $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{X_k(\omega)}_{\in\{\pm 1\}}$ est la somme d'un nombre impair de nombres impairs, donc est impair.
Par suite, $p_n = P(S_n = 0) = 0$, car l'événement $(S_n = 0)$ est impossible (car 0 est un nombre pair).
4. On a $Y_k(\Omega) = \left(\dfrac{X_k+1}{2}\right)(\Omega) = \left\{\dfrac{1+1}{2}, \dfrac{-1+1}{2}\right\} = \{0,1\}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli.
De plus, $P(Y_k = 1) = P\left(\dfrac{X_k+1}{2} = 1\right) = P(X_k = 1) = \dfrac{1}{2}$, donc Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
5. • Les variables $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suivent toutes une loi de Bernoulli et sont indépendantes, donc, pour tout $n > 0$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.
Par suite, $Z_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,
$$P(Z_n = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
• De plus,
$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}X_i + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$
donc $S_n = 2Z_n - n$.
6. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $2m > 0$, donc, d'après la question précédente,
$$\begin{aligned} p_{2m} &= P(S_{2m} = 0) = P(2Z_{2m} - 2m = 0) = P(Z_{2m} = m) \\ &= \binom{2m}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m}. \end{aligned}$$
Comme $\dbinom{0}{0}\dfrac{1}{4^0} = 1 = p_0$, ce résultat est encore valable pour $m = 0$.

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|p_n| = P(S_n = 0) \leq 1$, donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} p_n x^n$ est supérieur ou égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} 1x^n$, c'est-à-dire $R_p \geq 1$.
8. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right) &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2k-1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{m!2^m}\prod_{k=1}^{m}(2k-1) \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{m}(2k-1)\prod_{k=1}^{m}(2k)}{\prod_{k=1}^{m}(2k)} \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{\prod_{k=1}^{2m} k}{2^m\prod_{k=1}^{m} k} \\ &= \frac{1}{m!2^m}\frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2m)!}{m!m!}\frac{1}{2^m 2^m} = \binom{2m}{m}\frac{1}{4^m} = p_{2m} \end{aligned}$$
9. D'après le cours, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^n.$$
Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$, on a
$$(1-x^2)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\prod_{k=1}^{n}(\alpha-k+1)x^{2n}.$$

Par ailleurs, avec les expressions trouvées pour p_n dans la partie précédente, on a, pour tout $x \in]-1,1[$ (on a $R_p \geq 1$),

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{p_{2n+1}}_{=0} x^{2n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_{2n} x^{2n}. \end{aligned}$$

D'où, pour $\alpha = -1/2$, comme $p_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1)$ pour tout $n \geq 1$ d'après la question précédente, on a $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ pour tout $x \in]-1,1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

10. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T = n \Rightarrow S_n = 0$, donc $(T = n) \subset (S_n = 0)$, donc $P(T = n) \leq P(S_n = 0)$.
Or, pour tout n impair, $P(S_n = 0) = 0$, donc, pour tout n impair, $q_n = P(T = n) = 0$. En particulier, pour $n = 1$, $q_1 = 0$.
• $S_1 = 0$ est impossible, donc, par définition de T, on a $T \geq 2$ et $T = 2 \Leftrightarrow S_2 = 0$, donc $q_2 = P(T = 2) = P(S_2 = 0) = p_2 = \dfrac{1}{2}$.

11. • Pour tout $x \in [-1,1]$,
$$|g_n(x)| = |q_n x^n| = P(T = n)|x|^n \leq P(T = n),$$
donc $\|g_n\|_\infty^{[-1,1]} \leq P(T = n)$.
Or $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P(T = n)$ converge (et vaut $1 - P(T = +\infty)$ car $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$), donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \|g_n\|_\infty^{[-1,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
• Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur $[-1,1]$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n$ converge simplement sur $[-1,1]$, donc, en particulier, pour $x = 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} g_n(1)$ converge, ce qui assure que
$$R_q = \sup\{\rho > 0 : \sum_{n\geq 0} q_n \rho^n \text{ converge}\} \geq 1.$$

12. f et g sont deux fonctions développables en série entière au moins sur $]-1,1[$, donc, par produit de Cauchy, fg est développable en série entière au moins sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{0} p_k q_{n-k}\right) x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\right) x^n \\ &= p_0 q_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \quad \text{(d'après la relation admise pour tout } n \in \mathbb{N}^*) \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\ &= -1 + p_0 x^0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n \\ &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = -1 + f(x). \end{aligned}$$

13. • Comme, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ (d'après la question 9), la relation obtenue à la question précédente devient :
$$\forall x \in]-1,1[, \quad (1-x^2)^{-1/2} g(x) = (1-x^2)^{-1/2} - 1,$$
donc, en multipliant de part et d'autre par $\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{1/2}$, on a bien, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}.$$
• Pour tout $x \in]-1,1[$,
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (\alpha - k + 1) x^n,$$
donc, pour $\alpha = 1/2$, on a , pour tout $x \in]-1,1[$, comme $(-x^2) \in]-1,1[$,
$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)(-x^2)^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

donc

$$g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n},$$

où le rayon de convergence de cette série entière vaut 1.

14. Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right) x^{2n}$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$, on a :

$$q_0 = 0, \quad \left(\forall n \in \mathbb{N}^*, q_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - k + 1\right)\right) \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N}, q_{2n+1} = 0).$$

15. • Comme $T(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$P(T = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(T = n) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n 1^n = 1 - g(1).$$

• Or, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est continue sur $[-1,1]$ et $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[-1,1]$ (d'après la questin 11), la fonction $g = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est continue sur $[-1,1]$.
En particulier, elle est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} g(1) &= \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - \sqrt{1-x^2} \quad \text{(d'après l'expression trouvée en 13)} \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

• On a donc $P(T = +\infty) = 1 - g(1) = 0$, donc l'événement $T = +\infty$ est quasi impossible, donc on est quasi certain que le pion reviendra à l'origine à un instant donné.

16. *Pour me raccrocher au programme, je vais alors considérer que* $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n P(T = n)$ est la série génératrice de T.
D'après le cours, T admet une espérance si et seulement si g est dérivable en 1. Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$, donc g est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty.$$

g est continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $\lim_{x\to 1^-} g'(x) = +\infty$, donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, g n'est pas dérivable en 1, et, par suite, T n'admet pas d'espérance.