

Partie 1. Géométrie

1.

1.a) $P_{0,1}(t) = (1-t)^2$, $p_{1,2}(t) = 2t(1-t)$ et $p_{2,2}(t) = t^2$.

1.b) On trouve $A(t) = (t, 1)$, $B(t) = (1, 1-t)$ puis $C(t) = (2t-t^2, 1-t^2)$.

1.c) $\sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t) = (1-t)^2(1,0) + 2t(1-t)(1,1) + t^2(1,0) = (2t-t^2, 1-t^2)$ donc
 $\sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t) = (1-t)^2(1,0) + 2t(1-t)(1,1) + t^2(1,0) = C(t)$.

2. Soit $(u, v) \in \mathcal{T}$. $u = (x_u, y_u)$ et $v = (x_v, y_v)$. Montrons que le segment $[u; v]$ est inclus dans $\mathcal{T}$: Soit $\lambda \in [0; 1]$ et $w = \lambda u + (1-\lambda)v$.

$w = (x_w, y_w)$ où $x_w = \lambda x_u + (1-\lambda)x_v$ et $y_w = \lambda y_u + (1-\lambda)y_v$.

$x_w + y_w = \lambda(x_u + y_u) + (1-\lambda)(x_v + y_v)$. u et v sont dans $\mathcal{T}$ donc $x_u + y_u \geq 1$ et $x_v + y_v \geq 1$. De plus λ et $1-\lambda$ sont positifs donc $x_w + y_w \geq \lambda + (1-\lambda)$. On en déduit que $w \in \mathcal{T}$ puis l'inclusion $[u; v] \subset \mathcal{T}$. Ceci étant vrai dès que u et v sont dans $\mathcal{T}$, on en conclut que $\mathcal{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3.

3.a) Soit $t \in [0; 1]$.

$(2t-t^2) + (1-t^2) - 1 = 2t(1-t) \geq 0$ donc $2t-t^2 + (1-t^2) \geq 1$ et $C(t) \in \mathcal{T}$: tous les points de $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{T}$.

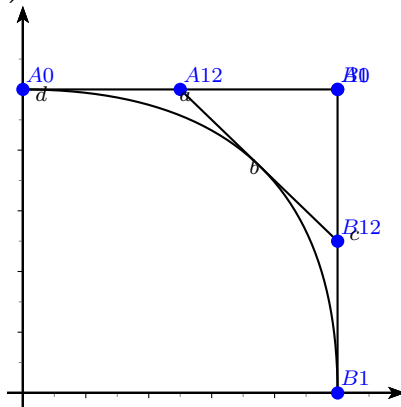
3.b) Soit $t \in [0; 1]$. $f'(t) = (2-2t, -2t)$. Ce vecteur n'est pas nul donc c'est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$.

3.c) Soit $t \in [0; 1]$. $C(t) - A(t) = (t-t^2, -t^2) = \frac{t}{2}f'(t)$ et $C(t) \in \mathcal{D}_t$, $f'(t)$ dirige $\mathcal{D}_t$ sont $A(t) \in \mathcal{D}_t$.

De même, avec $C(t) - B(t) = -\frac{(1-t)}{2}f'(t)$, on montre que $B(t) \in \mathcal{D}_t$.

Par ailleurs la droite $\mathcal{D}_t$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ donc le segment $[A(t); B(t)]$ est inclus dans $\mathcal{D}_t$.

3.d)



Partie 2. Algèbre linéaire et probabilités

4.

4.a) φ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation, $\varphi_n(P + \lambda Q) = \varphi_n(P) + \lambda \varphi_n(Q)$ donc φ_n est une application linéaire.

Si $k < n$, $\varphi_n(X^k)$ est de degré au plus $k+1$ donc est dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Par ailleurs, $\varphi_n(X^n) = nX^n \in \mathbb{R}_n[X]$ donc, avec la linéarité, on peut conclure que φ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Finalement, φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout k entre 0 et n , $P\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{R}$ et $p_{k,n}$ est un polynôme de degré n donc $B_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: B_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(P + \lambda Q)\left(\frac{k}{n}\right) = P\left(\frac{k}{n}\right) + \lambda Q\left(\frac{k}{n}\right)$ donc B_n est une application linéaire.

Par conséquent, B_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b) Si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $p'_{k,n}(X) = \binom{n}{k} k X^{k-1} (1-X)^{n-k} - \binom{n}{k} (n-k) X^k (1-X)^{n-k}$ puis

$X(1-X)p'_{k,n}(X) = k(1-X)p_{k,n} - (n-k)Xp_{k,n}(X)$. On vérifie que cette égalité est encore valable pour $k=0$ et pour $k=n$ ce qui permet d'obtenir, après simplification, $\varphi_n(p_{k,n}(X)) = kp_{k,n}(X)$.

4.c) Pour tout entier k entre 0 et n , $p_{k,n}$ étant de plus non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre k . Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, on en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est libre. C'est de plus une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

C'est alors une base de $\mathbb{R}_n[X]$ composée de vecteurs propres de φ_n donc φ_n est diagonalisable.

4.d) En particulier 0 est valeur propre de φ_n donc φ_n n'est pas bijectif.

Soit P dans le noyau de B_n . Comme la famille $\mathcal{F}$ est libre, pour tout k entre 0 et n , $P\left(\frac{k}{n}\right) = 0$: P a donc au moins $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n donc P est le polynôme nul.

Par conséquent, B_n est injectif ; il s'agit d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie donc B_n est bijectif.

5.

5.a) On considère une urne contenant des boules rouges et vertes. La proportion de boules rouges est t . On effectue r tirages successifs et avec remise d'une boule de cette urne. Le nombre de boules rouges obtenues suit alors la loi $\mathcal{B}(r, t)$ (nombre de succès lors de la réalisation de r épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes).

5.b) $T_r(\Omega) = \llbracket 0; r \rrbracket$ et, pour tout k entre 0 et r , $P(T_r = k) = \binom{r}{k} t^k (1-t)^{r-k}$ donc

$$P(T_r = k) = p_{k,r}(t).$$

5.c) On sait que $E(T_r) = rt$ donc, par linéarité de E , $E(\overline{T_r}) = t$. $V(T_r) = rt(1-t)$ donc $V(\overline{T_r}) = \frac{t(1-t)}{r}$.

D'autre part, $V(T_r) = E(T_r^2) - (E(T_r))^2$ donc $E(T_r^2) = rt(1-t + rt)$ et, toujours par linéarité, $E((\overline{T_r})^2) = \frac{t(1-t + rt)}{r} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t$.

5.d) $T_r(\Omega) = \llbracket 0; r \rrbracket$ donc $\sum_{k=0}^r P(T_r = k) = 1$: $\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = 1$.

D'après la formule de transfert rappelée dans l'énoncé avec $h : y \mapsto \frac{y}{r}$,

$$E(\overline{T_r}) = \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} P(T_r = k) = E(\overline{T_r}) : \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t.$$

En utilisant $E((\overline{T_r})^2)$ et $h : y \mapsto \frac{y^2}{r^2}$, on obtient de même $\sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t$.

5.e) Ces trois égalités sont des égalités entre polynômes, valables en une infinité de points donc en tout point t de $\mathbb{R}$ (si, pour tout $t \in [0; 1]$, $P(t) = Q(t)$, alors le polynôme $P - Q$ a une infinité de racines donc il est nul).

6. Pour tous polynômes P et Q , $\deg(P + \lambda Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ donc $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ ($\mathbb{R}_2[X]$ est de plus non vide et est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$ car $n \geq 2$).

$B_n(1) = 1$, $B_n(X) = X$ et $B_n(X^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)X^2 + \frac{1}{n}X$ donc $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$ sont dans $\mathbb{R}_2[X]$. Comme $(1, X, X^2)$ engendre $\mathbb{R}_2[X]$, on en déduit que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par B_n .

7. On obtient A_n en mettant, en colonnes, les coordonnées de $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$ dans la base $(1, X, X^2)$ donc $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$. On vérifie alors que $A_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H$.

8.

8.a) H est une matrice triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 0 et 1.

Le rang de H est égal à 2 donc la dimension de $E_0(H)$ est 1 (d'après le théorème du rang).

Le rang de $H - I_3$ est égal à 1 donc la dimension de $E_1(H)$ est 2.

Ainsi $\dim E_1(H) + \dim E_0(H) = 3$ et $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc H est diagonalisable.

8.b) Q est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls donc Q est inversible (par exemple le déterminant de Q est $1 \neq 0$).

8.c) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à H $h(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $h(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ donc, si on pose $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, 1, 0)$, (e_1, e_2) est une base de $E_1(h)$ (famille libre de 2 vecteurs dans un espace de dimension 2).

On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_3 = (a, b, 1)$ engendre le noyau de H . On doit donc avoir $a = 0$ et $b + 1 = 0$ donc $b = -1$: $e_3 = (0, -1, 1)$.

D'après la question précédente, la matrice de (e_1, e_2, e_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est inversible donc (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de h est D . D'après la formule de changement de bases, on a alors $H = QDQ^{-1}$.

9.

9.a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = I_3$.

9.b) Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par propriété des opérations matricielles, $\psi(M_1 + \lambda M_2) = \psi(M_1) + \lambda \psi(M_2)$ donc ψ est linéaire.

9.c) ψ est une application linéaire en dimension finie donc elle est continue : si $\lim_{l \rightarrow +\infty} M_l = M$, alors

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \psi(M_l) = \psi(M) \text{ c'est-à-dire } \lim_{l \rightarrow +\infty} (QM_lQ^{-1}) = QMQ^{-1}.$$

9.d) $H = QDQ^{-1}$ et $QI_3Q^{-1} = I_3$ donc $A_n = QA'_nQ^{-1}$ où $A'_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}D = D_n$. Ainsi $A_n = QD_nQ^{-1}$.

9.e) Pour $n \geq 2$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc $\lim_{l \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^l = 0$. Ainsi $\lim_{l \rightarrow +\infty} D_n^l = D$.

De plus, pour tout entier naturel l , $A_n^l = QD_n^lQ^{-1}$ donc, d'après la question 9.c),

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} A_n^l = QDQ^{-1} = H.$$

9.f) Pour $n \geq 2$, $A_n^n = QD_n^nQ^{-1}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} = e^{-1}I_3 + (1 - e^{-1})D.$$

$$\text{D'après la question 9.c), } \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = e^{-1}I_3 + (1 - e^{-1})QDQ^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$$

Partie 3. Analyse et probabilités

10.

10.a) La variance de Y est positive donc $E(Y^2) \geq (E(Y))^2$. Par croissance de la racine carrée, $|E(Y)| \leq \sqrt{E(Y^2)}$ et, pour tout réel x , $x \leq |x|$ donc $E(Y) \leq \sqrt{E(Y^2)}$.

10.b) On applique ce qui précède à $Y = |t - \overline{T_n}|$. Comme $E(\overline{T_n}) = t$, $E(Y^2) = V(\overline{T_n}) = \frac{t(1-t)}{n}$

(question 5.) donc

$$E(|t - \overline{T_n}|) \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$$

11.

11.a) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ donc f' est continue sur le segment $[0; 1]$. On en déduit que f' est bornée sur ce segment : il existe $M_f \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $x \in [0; 1]$, $|f'(x)| \leq M_f$. L'inégalité des accroissements finis permet alors de conclure que :

$$\forall (a, b) \in [0; 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f |a - b|$$

11.b) Soit $t \in [0; 1]$.

D'après la question précédente, pour tout $w \in \Omega$, $|f(t) - f(\overline{T_n(w)})| \leq M_f |t - \overline{T_n}|$ ($\overline{T_n}$ ne prend que des valeurs dans $[0; 1]$).

Par croissance et linéarité de l'espérance, on a $E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq M_f E(|t - \overline{T_n}|)$ et, avec la question 10.b),

$$E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$$

11.c) Pour $t \in [0; 1]$, $t(1-t) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2 \leq \frac{1}{4}$ donc, en utilisant la question précédente et la remarque de l'énoncé (début de partie 3.),

$$\forall t \in [0; 1], |f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$$

11.d) On en déduit que $\frac{M_f}{2\sqrt{n}}$ est un majorant de $f - B_n(f)$ sur $[0; 1]$ donc $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}$.

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$: la suite $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

Partie 4. Intégrales

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ est une fonction continue sur le segment $[0; 1]$ et la suite de fonctions $(B_n(f))_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ vers f donc on peut utiliser le théorème d'interversion limite/intégrale pour obtenir :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 B_n(f)(x) dx \right) = \int_0^1 f(x) dx$$

13.

13.a) Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$.

a et b sont positifs donc $x \mapsto x^a(1-x)^b$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx$ existe.

On pose $u(x) = x^a$, $v'(x) = (1-x)^b$ et $u'(x) = ax^{a-1}$ et $v(x) = -\frac{1}{b+1}(1-x)^{b+1}$. Comme $a \geq 1$,

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0; 1]$ donc, par intégration par parties, $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx =$

$$\left[-\frac{1}{b+1} x^a(1-x)^{b+1} \right]_0^1 + \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1} dx. \quad a > 0 \text{ et } b+1 > 0 \text{ donc}$$

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+1} dx$$

13.b) Soit k entre 1 et n .

La question précédente avec $a = k$ et $b = n - k$ donne

$$\int_0^1 p_{k,n}(x)dx = \binom{n}{k} \frac{k}{n-k+1} \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k+1}dx \text{ puis } \int_0^1 p_{k,n}(x)dx = \binom{n}{k} \frac{k}{n-k+1} \frac{1}{\binom{n}{k-1}} \int_0^1 p_{k-1,n}(x)dx$$

Par ailleurs, $\binom{n}{k} \frac{k}{n-k+1} \frac{1}{\binom{n}{k-1}} = \frac{k(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!(n-k+1)!} = 1$ donc

$$\int_0^1 p_{k,n}(x)dx = \int_0^1 p_{k-1,n}(x)dx.$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 p_{k,n}(x)dx$ ne dépend pas de k entre 0 et n . En particulier, elle

$$\text{est égale à } \int_0^1 p_{n,n}(x)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Finalement, pour tout k entre 0 et n ,

$$\int_0^1 p_{k,n}(x)dx = \frac{1}{n+1}$$

13.c) Par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment,

$$\int_0^1 B_n(f)(x)dx = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 p_{k,n}(x)dx ; \text{ la question précédente nous dit alors que } \int_0^1 B_n(f)(x)dx = S_n(f).$$

En utilisant la question 12., on conclut alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

14. On suppose maintenant que f est continue sur $[0; 1]$.

f est continue en 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} f(1) = 0$ et $S_n(f) \sim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

On reconnaît alors la suite des sommes de Riemann associée à la fonction continue f sur le segment

$$[0; 1] \text{ et on retrouve } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x)dx.$$

15.

15.a) Soit $x \in [0; 1]$ et $f : u \mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$.

a , b et c sont des entiers naturels donc f est continue sur $[0; +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur cet intervalle.

Quand u tend vers l'infini, $f(u) \sim \frac{1}{u^{c-a-b}}$ or $c-a-b \geq 2 > 1$ donc la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$. Par comparaison, f l'est aussi.

On peut alors conclure que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ est convergente.

15.b) Soit g la fonction définie sur $[0; 1] \times [0; +\infty[$ par $g(x, u) = \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$.

Pour tout $u \in [0; +\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x, u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ (car $b \geq 1$). De plus,

$$\text{pour } (x, u) \in [0; 1] \times [0; +\infty[, \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = \frac{bu^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}.$$

Pour tout $x \in [0; 1]$, la fonction $u \mapsto g(x, u)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ et intégrable (question précédente).

$b-1 \geq 0$ donc, pour tout $x \in [0; 1]$, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, u)$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.

Pour $(x, u) \in [0; 1] \times [0; +\infty[, 0 \leq 1+xu \leq 1+u$ donc, comme $b-1 \geq 0$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) \right| \leq \varphi(u)$ où

$$\varphi(u) = \frac{bu^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c}.$$

φ est continue par morceaux et positive sur $[0; +\infty[$ et, quand u tend vers l'infini, $\varphi(u) \sim \frac{b}{u^{c-a-b}}$

avec $c - a - b > 1$ donc φ est intégrable sur $[0; +\infty[$.

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

15.c) Par quotient, h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1[$. De plus, pour $t \in [0; 1[$, $h'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} > 0$ donc h est strictement croissante.

h est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1[$ donc, d'après le théorème de bijection, h réalise une bijection de $[0; 1[$ dans $h([0; 1[) = [h(0); \lim_1 h[= [0; +\infty[$.

15.d) $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c} du.$

Comme h est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective, on peut utiliser le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$. On

obtient alors $F(0) = \int_0^{+\infty} t^a (1-t)^{c-a-2} dt = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \int_0^1 p_{a,c-2}(t) dt$. Avec le début de la partie 4,

$$F(0) = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \frac{1}{c-1}.$$

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}} du \text{ donc } F(1) = \frac{1}{\binom{c-b-2}{a}} \frac{1}{c-b-1}$$

Partie 5. Séries de fonctions

16. Pour $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

$n, n-1, \dots, n-k+1$ sont k termes équivalents à n . k est fixé donc, par produit, $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers l'infini.

En multipliant par $t^k(1-t)^{n-k}$, on obtient, pour $t \in]0; 1[$, $f_n(t) \sim_{+\infty} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{t}{1-t}\right)^k (1-t)^n$.

17. Soit $t \in [0; 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc la série $\sum f_n(0)$ converge.

Si $n > k$, $f_n(1) = 0$ donc la série $\sum f_n(1)$ converge.

Pour $t \in]0; 1[$, on pose $u_n(t) = \frac{n^k}{k!} \left(\frac{t}{1-t}\right)^k (1-t)^n$.

$u_n(t) > 0$ et $\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k (1-t)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = 1-t < 1$. D'après le critère de d'Alembert, la série $\sum u_n(t)$ converge.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(t)$ converge.

Conclusion : pour tout $t \in [0; 1]$, la série $\sum f_n(t)$ converge simplement sur $[0; 1]$.

18. Comme vu précédemment, $S(0) = 0$ et $S(1) = f_k(1) = 1$.

19.

19.a) Si $u \in]-1; 1[$, $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

19.b) On dérive k fois cette égalité. Par récurrence, on démontre que la dérivée k ième de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$

est $u \mapsto \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$. Par conséquent, pour tout $u \in [0; 1[$,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}$$

19.c) Soit $t \in]0; 1]$.

En utilisant la définition de $f_n(t)$, $S(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} t^k (1-t)^{n-k}$ donc, avec la question précédente, $S(t) = \frac{t^k}{(1-(1-t))^{k+1}}$. Après simplification, on trouve $S(t) = \frac{1}{t}$.

19.d) Supposons que la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0; 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0; 1]$ donc, d'après le théorème de transfert de continuité, S est continue sur $[0; 1]$.

D'après la question précédente, S n'est pas continue sur $[0; 1]$ donc il y a une contradiction.

Par conséquent, la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $[0; 1]$.