Corrigé de l'épreuve de Mathématiques du concours E3A-Polytech, filière PC, session 2024

EXERCICE 1

1. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$L(\lambda P + \mu Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda P + \mu Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \lambda P(t) + \mu Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \lambda L(P) + \mu L(Q)\,.$$

L'application L est donc linéaire.
Comme elle est définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\boxed{L \text{ est une forme linéaire sur } E}$.

2. Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$. On a

$$L(e_k) = \int_{-1}^{1} e_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}\,.$$

Ainsi, on a $\boxed{L(e_k) = 0 \text{ si } k \text{ est impair, } L(e_k) = \dfrac{2}{k+1} \text{ si } k \text{ est pair}}$.

3. On a en particulier $L(e_0) = 2 \neq 0$. L'application L est donc une forme linéaire non nulle sur E. En particulier, son noyau est un hyperplan de E. On a donc $\boxed{\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(E) - 1 = 2n}$.

4. On a $L(e_1) = 0$ donc le vecteur e_1 appartient à $\mathrm{Ker}(L)$. En particulier, comme e_1 est non nul, la famille (e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$. D'après le théorème de la base incomplète, $\boxed{\text{il existe donc une base de } \mathrm{Ker}(L) \text{ dont le premier vecteur est } e_1}$.

5. Soient $P \in \mathrm{Vect}(e_0)$ et $Q \in \mathrm{Ker}(L)$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda e_0$. On a donc

$$(P|Q) = \lambda(e_0|Q) = \lambda \int_{-1}^{1} e_0(t) Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda L(Q) = 0\,.$$

$\boxed{\text{Les sous-espaces } \mathrm{Vect}(e_0) \text{ et } \mathrm{Ker}(L) \text{ sont donc orthogonaux.}}$
En particulier, ils sont en somme directe. De plus, on a $\dim(\mathrm{Vect}(e_0)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 1 + 2n = \dim(E)$. D'après une caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on a donc $\boxed{E = \mathrm{Vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)}$.
Remarque. On peut obtenir ce résultat sans utiliser de produit scalaire. En effet, on a $L(e_0) \neq 0$ donc e_0 n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(L)$. En particulier, la droite $\mathrm{Vect}(e_0)$ n'est pas incluse dans l'hyperplan $\mathrm{Ker}(L)$ donc, d'après le cours, $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont supplémentaires dans E.

6. Soit λ un réel.

6.1. Soient $P, Q \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par linéarité de L, on a

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha P + \beta Q) &= (\alpha P + \beta Q) + \lambda L(\alpha P + \beta Q) X \\ &= \alpha P + \beta Q + \lambda(\alpha L(P) + \beta L(Q)) X \\ &= \alpha P + \beta Q + \lambda \alpha L(P) X + \lambda \beta L(Q) X \\ &= \alpha(P + \lambda L(P) X) + \beta(Q + \lambda L(Q) X) \\ &= \alpha T_\lambda(P) + \beta T_\lambda(Q)\,. \end{aligned}$$

L'application T_λ est donc linéaire.
De plus, pour tout $P \in E$, on a $\deg(P) \leq 2n$ et $\lambda L(P) \in \mathbb{R}$ donc $\deg(\lambda L(P) X) \leq 1$, d'où $\deg(T_\lambda(P)) \leq 2n$. L'application T_λ est donc définie sur E et à valeurs dans E.
En conclusion, $\boxed{T_\lambda \text{ est un endomorphisme de } E}$.

6.2. Soit $P \in E$. Par linéarité de L, on a $(L \circ T_\lambda)(P) = L(T_\lambda(P)) = L(P) + \lambda L(P)L(X)$. Puisqu'on a $L(X) = L(e_1) = 0$, on en conclut qu'on a $\boxed{(L \circ T_\lambda)(P) = L(P)}$.

6.3. On considère une base de E, notée $\mathcal{B}$, adaptée à la décomposition obtenue aux questions **4.** et **5.**, c'est-à-dire une base de E dont les deux premiers vecteurs sont e_0 et e_1 et les autres sont dans $\mathrm{Ker}(L)$.
On a $T_\lambda(e_0) = e_0 + \lambda L(e_0)X = e_0 + 2\lambda X = e_0 + 2\lambda e_1$. De plus, pour tout $P \in \mathrm{Ker}(L)$, on a $L(P) = 0$ donc $T_\lambda(P) = P$.

La matrice de T_λ relativement à la base $\mathcal{B}$ est donc $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

6.4. La matrice A étant triangulaire inférieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, $\boxed{T_\lambda \text{ admet pour unique valeur propre } 1}$.

6.5. Puisque 1 est l'unique valeur propre de T_λ, l'endomorphisme T_λ est diagonalisable si et seulement si le polynôme $X - 1$ annule T_λ, si et seulement si le polynôme $X - 1$ annule A, ce qui équivaut à $A = I_{2n+1}$.
En conclusion, $\boxed{\text{l'endomorphisme } T_\lambda \text{ est diagonalisable si et seulement si on a } \lambda = 0}$.

6.6. Puisque 0 n'est pas valeur propre de T_λ, $\boxed{T_\lambda \text{ est un automorphisme de } E}$.

6.7. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $P \in E$, on a

$$(T_\alpha \circ T_\beta)(P) = T_\alpha(T_\beta(P)) = T_\beta(P) + \alpha L(T_\beta(P))X = P + \beta L(P)X + \alpha L(P)X = P + (\alpha+\beta)L(P)X$$

d'après le résultat de la question **6.2.** On a donc $\boxed{T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}}$.

6.8. En particulier, on a $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_0 = \mathrm{Id}_E$. En composant par T_λ^{-1} à gauche, on obtient ainsi $\boxed{T_\lambda^{-1} = T_{-\lambda}}$.

EXERCICE 2

1. 1.1. La variable aléatoire X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}}$.

De plus, $\boxed{X \text{ admet une espérance et une variance toutes deux égales à } \lambda}$.

1.2. $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \mathbf{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ et } \mathbf{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.}$

1.3. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes sur Ω. On dit que X_1 et X_2 sont indépendantes si, $\boxed{\text{pour tout } x_1 \in X_1(\Omega) \text{ et tout } x_2 \in X_2(\Omega), \text{ on a } \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = \mathbb{P}(X_1 = x_1)\mathbb{P}(X_2 = x_2)}$.

2. 2.1. L'évènement $\{Y = 0\}$ se réalise si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que l'évènement $\{X = 2k\}$ se réalise. On a donc $\boxed{\{Y = 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = 2k\}}$. De même, on a $\boxed{\{Y = 1\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{X = 2k + 1\}}$.

2.2. Puisque Y est à valeurs dans $\{0, 1\}$, Y est une variable de Bernoulli dont le paramètre, noté p, est $\mathbb{P}(Y = 1)$.
Les évènements $\{X = 2k + 1\}$, $k \in \mathbb{N}$, étant deux à deux incompatibles, on a

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda}\mathbf{sh}(\lambda) = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2}.$$

En conclusion, $\boxed{Y \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } p = \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2}}$.

En particulier, on a $\boxed{\mathbb{E}(Y) = p = \dfrac{1-e^{-2\lambda}}{2}}$.

3. 3.1. Puisque X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Z est à valeurs dans $\{1,2\}$, on a $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}}$.

3.2. Puisque Z est à valeurs dans $\{1,2\}$, la famille $(\{Z=1\},\{Z=2\})$ est un système complet d'évènements.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(T=k,\, Z=1) + \mathbb{P}(T=k,\, Z=2) = \mathbb{P}(X=k,\, Z=1) + \mathbb{P}(2X=k,\, Z=2)\,.$$

Or, les variables aléatoires X et Z sont indépendantes, donc $2X$ et Z le sont aussi. On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T=k) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Z=1) + \mathbb{P}(2X=k)\mathbb{P}(Z=2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X=k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(2X=k)}.$$

3.3. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Si k est impair, l'évènement $\{2X=k\}$ est impossible donc on a $\mathbb{P}(T=k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
Si k est pair, on a $\mathbb{P}(T=k) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X=k) + \dfrac{1}{2}\mathbb{P}\left(X=\dfrac{k}{2}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\dfrac{\lambda^k}{k!} + \dfrac{\lambda^{k/2}}{(k/2)!}\right)$.
$\boxed{\text{On a ainsi déterminé la loi de } T.}$

3.4. On note A l'évènement : « T prend une valeur paire ». En procédant comme dans la question **2.1.**, on établit que $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{T=2j\}$. Par incompatibilité des évènements $\{T=2j\}$, $j \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T=2j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \frac{\lambda^j}{j!}\right) = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j}{j!}\right)\,.$$

La probabilité que T prenne des valeurs paires est donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{2}e^{-\lambda}(\mathbf{ch}(\lambda) + e^{\lambda}) = \dfrac{3+e^{-2\lambda}}{4}}$.

EXERCICE 3

1. Soit $x \in [0,+\infty[$. On a $x^2 - x = x(x-1)$ donc $x^2 - x$ est du signe de $x-1$. En particulier, on a $\boxed{x^2 \geq x \text{ si } x \geq 1 \text{ et } x^2 \leq x \text{ si } x \in [0,1]}$.

2. 2.1. La fonction $f : t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables. De plus, pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a $\boxed{f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}\cos(t^\alpha)}$.

2.2. La fonction φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. De plus, pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a

$$\boxed{\varphi'(t) = \frac{\alpha t^\alpha\cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)}{t^2}}.$$

2.3. Soit $t \in [1,+\infty[$. On a $|\cos(t^\alpha)| \leq 1$ et $|\sin(t^\alpha)| \leq 1$ donc, d'après l'inégalité triangulaire, on a $|\varphi'(t)| \leq \dfrac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2}$ donc $\boxed{|\varphi'(t)| \leq \dfrac{\alpha t^\alpha + 1}{t^2}}$.

2.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction φ est continue sur $[n, n+1]$, dérivable sur $]n, n+1[$ et, pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $|\varphi'(t)| \leq \dfrac{1+\alpha t^\alpha}{t^2} = \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\alpha}{t^{2-\alpha}} \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$ (car $2-\alpha > 0$).
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc, $\boxed{\text{pour tout } t \in [n, n+1],}$

$$\boxed{|\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|}.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|u_n - a_n| = \left|\displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(n)\right| = \left|\displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(t) - \varphi(n)\,\mathrm{d}t\right|$. D'après l'inégalité triangulaire intégrale ($n < n+1$) et la question précédente, on a donc

$$|u_n - a_n| \leq \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)|\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|\,\mathrm{d}t\,.$$

Puisqu'on a $|t-n| \leq 1$ pour tout $t \in [n, n+1]$, on a donc $|u_n - a_n| \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\mathrm{d}t$, d'où $\boxed{|u_n - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}}$.

4. 4.1. La fonction $g : t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue, donc continue par morceaux, sur $[1,+\infty[$.
On a $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (car $2 > 1$).
D'après le théorème de comparaison des fonctions intégrables, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est donc intégrable sur } [1,+\infty[}$.

4.2. Les fonctions $t \mapsto -\cos(t)$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, de dérivée respective $t \mapsto \sin(t)$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{t^2}$. Soit $A > 1$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a

$$\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \cos(1) - \frac{\cos(A)}{A} - \int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Or, on a $\left|\dfrac{\cos(A)}{A}\right| \leq \dfrac{1}{A}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, quand $A \to +\infty$, $\dfrac{\cos(A)}{A}$ admet une limite égale à 0. De plus, par intégrabilité de g, quand $A \to +\infty$, $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie. Ainsi, quand $A \to +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie, égale à $\cos(1) - \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Autrement dit, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

5. La fonction $\psi : \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to &]1,+\infty[\\ u & \mapsto & u^{1/\alpha} \end{array}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement croissante. De plus, la fonction φ est continue sur $\psi(]1,+\infty[) =]1,+\infty[$. D'après le théorème de changement de variable sur un intervalle quelconque, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(\psi(u))\psi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et, en cas de convergence, elles sont égales.
Or, pour tout $u \in]1,+\infty[$, on a $\varphi(\psi(u))\psi'(u) = \varphi(u^{1/\alpha})\dfrac{1}{\alpha}u^{1/\alpha-1} = \dfrac{\sin(u)}{u^{1/\alpha}}\dfrac{1}{\alpha}u^{1/\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\sin(u)}{u}$.

D'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(\psi(u))\psi'(u)\mathrm{d}u$ est donc convergente.

On en conclut que $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{N+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Quand $N \to +\infty$, la somme partielle $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$ admet donc une limite finie égale à $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Autrement dit, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge}}$.

7. D'après la question **3.**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq |u_n - a_n| \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.
Or, on a $2 > 1$ et $2 - \alpha > 1$ donc les séries de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergent. La série de terme général $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est donc convergente.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |u_n - a_n|$ est donc convergente. Autrement dit, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n - a_n \text{ converge absolument}}$.

8. D'après la question **7.**, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n - a_n$ converge absolument, donc converge. De plus, d'après la question **6.**, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge. Comme on a $a_n = u_n - (u_n - a_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on en conclut que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \text{ converge}}$ comme combinaison linéaire de séries convergentes.

9. 9.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|\sin(n^\alpha)| \in [0, 1]$ donc, d'après la question de cours, on a

$$0 \leq \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leq \frac{|\sin(n^\alpha)|}{n}.$$

Or, la série de terme général $\dfrac{|\sin(n^\alpha)|}{n} = |a_n|$ converge par hypothèse.
D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \text{ est donc convergente}}$.

9.2. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin(2x)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, de dérivée respective $x \mapsto \cos(2x)$ et $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$. Soit $A > 1$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a

$$\int_1^A \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2x)}{2x}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\sin(2x)}{2x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(2A)}{2A} - \frac{\sin(2)}{2} + \int_1^A \frac{\sin(2x)}{2x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Or, on a $\left|\dfrac{\sin(2A)}{2A}\right| \leq \dfrac{1}{2A}$ donc, d'après le théorème des gendarmes, quand $A \to +\infty$, $\dfrac{\sin(2A)}{2A}$ admet une limite égale à 0.
De plus, on a $\dfrac{\sin(2x)}{2x^2} \underset{x\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $2 > 1$) donc, d'après le théorème de comparaison des fonctions intégrables, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{2x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et, en particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi, quand $A \to +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^A \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ admet une limite finie. Autrement dit, $\boxed{\text{l'intégrale } \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge}}$.

9.3. Le même changement de variable que celui de la question **5.** permet d'en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\cos(2n^\alpha)}{n}$.

Or, d'après la formule de duplication du cosinus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n} = \frac{\cos(2n^\alpha)}{n} + 2\frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}\ .$$

Par somme de séries convergentes, on en conclut que la série harmonique converge.

Puisque la série harmonique diverge, on en conclut par contraposition que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|$ est divergente. Ainsi, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n \text{ converge mais ne converge pas absolument}}$.

EXERCICE 4

1. On a $|n^2 2^{-n} P(n)Q(n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_p b_q| \dfrac{n^{p+q+2}}{2^n}$ donc, d'après le théorème de croissances comparées, quand $n \to +\infty$, $|n^2 2^{-n} P(n)Q(n)|$ admet une limite égale à 0, ce qui signifie qu'on a

$$|2^{-n} P(n)Q(n)| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)\ .$$

Or, la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge (car $2 > 1$).

D'après le théorème de comparaison des séries positives, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} |2^{-n} P(n)Q(n)|$ est donc convergente. Autrement dit, $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2^{-n} P(n)Q(n) \text{ est absolument convergente}}$.

2. 2.1. Soit $S \in E$.

• Si S est le polynôme nul, alors on a $(S|S) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \times 0 \times 0 = 0$.

• Réciproquement, on suppose qu'on a $(S|S) = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(S(n))^2 = 0$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}(S(n))^2$ étant à termes positifs et de somme nulle, tous ses termes sont nuls.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc $2^{-n}(S(n))^2 = 0$, donc $(S(n))^2 = 0$ (car $2^{-n} \neq 0$) d'où $S(n) = 0$.

Le polynôme S possédant une infinité de racines, il s'agit du polynôme nul.

En conclusion, $\boxed{\text{on a } (S|S) = 0 \text{ si et seulement si } S \text{ est le polynôme nul}}$.

2.2. • D'après la question **1.**, l'application $(\cdot|\cdot)$ définie par l'énoncé est définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Soient $P, Q \in E$. On a $(P|Q) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P(n)Q(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} Q(n)P(n) = (Q|P)$. L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc symétrique.

• Soient $P_1, P_2, Q \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
(\lambda P_1 + \mu P_2 | Q) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(\lambda P_1 + \mu P_2)(n) Q(n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(\lambda P_1(n) + \mu P_2(n)) Q(n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda 2^{-n} P_1(n) Q(n) + \mu 2^{-n} P_2(n) Q(n) \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P_1(n) Q(n) + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} P_2(n) Q(n) \\
&= \lambda(P_1|Q) + \mu(P_2|Q)\,.
\end{aligned}$$

L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc linéaire par rapport à sa première variable. Comme elle est symétrique, elle est aussi linéaire par rapport à sa seconde variable. L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc bilinéaire.

• Soit $P \in E$. On a $(P|P) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(P(n))^2 \geq 0$ (somme de termes positifs). De plus, d'après la question précédente, si on a $(P|P) = 0$, alors P est le polynôme nul.
L'application $(\cdot|\cdot)$ est donc définie positive.

• En conclusion, l'application $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire symétrique sur E, il s'agit donc d'$\boxed{\text{un produit scalaire sur } E}$.

3. 3.1. D'après le cours sur les séries géométriques, $\boxed{\text{la fonction } f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \text{ est définie sur }]-1,1[}$ et, pour tout $t \in]-1,1[$, on a $\boxed{f(t) = \dfrac{1}{1-t}}$.

3.2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $e^{-x} \in]-1,1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $e^{-nx} = (e^{-x})^n$. D'après la question précédente, $\boxed{\text{la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-nx} \text{ est donc convergente}}$.

3.3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\boxed{g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = f(e^{-x})}$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]-1,1[$, et la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Par composition, $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.

3.4. Pour tout $t \in]-1,1[$, on a $f(t) = \dfrac{1}{1-t} = (1-t)^{-1}$, $f'(t) = (-1) \times (-1) \times (1-t)^{-2} = \dfrac{1}{(1-t)^2}$ et $f''(t) = (-2) \times (-1) \times (1-t)^{-3} = \dfrac{2}{(1-t)^3}$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc $\boxed{g(x) = f(e^{-x}) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}}$, $\boxed{g'(x) = -e^{-x} f'(e^{-x}) = \dfrac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}}$ et

$$g''(x) = e^{-x} f'(e^{-x}) + e^{-2x} f''(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} + \frac{2e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3} = \boxed{\frac{e^{-x} + e^{-2x}}{(1-e^{-x})^3}}.$$

3.5. D'après le théorème de dérivation de la somme d'une série entière, les séries entières $\sum_{nge1} nt^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} n(n-1)t^{n-2}$ ont un rayon de convergence égal à 1 et leur somme coïncide sur $]-1,1[$

avec les fonctions f' et f'' respectivement. On a ainsi

$$S_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

et

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2\,.$$

De même, comme les séries de terme général $n(n-1)2^{-n}$ et $n2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, convergent, on a

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 2^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} + \sum_{n=1}^{+\infty} n2^{-n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} + S_1$$

où

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)2^{-n} = \frac{1}{2^2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{4}f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{2}{4}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = 4$$

donc $S_2 = 6$. En conclusion, on a calculé $\boxed{S_0 = 2,\ S_1 = 2 \text{ et } S_2 = 6}$.

4. 4.1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}(X^2 - aX - b|1) = (X^2|1) - a(X|1) - b(1|1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}n^2 - a\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}n - b\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \\ &= S_2 - aS_1 - bS_0 = 6 - 2a - 2b\,.\end{aligned}$$

De même, on a

$$(X^2 - aX - b|X) = (X^2|X) - a(X|X) - b(1|X) = S_3 - aS_2 - bS_1 = 26 - 6a - 2b\,.$$

Or, on a

$$\begin{cases} (X^2 - aX - b|1) = 0 \\ (X^2 - aX - b|X) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 4a = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = -2 \end{cases}.$$

Ainsi, le vecteur $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X si et seulement si on a $\boxed{(a, b) = (5, -2)}$.

4.2. On note A l'ensemble $\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}(n^2 - cn - d)^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\}$. En notant $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on a

$$\begin{aligned}A = \left\{(X^2 - cX - d|X^2 - cX - d),\ (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\} &= \left\{\|X^2 - cX - d\|^2,\ (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{\|X^2 - P\|^2,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\right\}\ .\end{aligned}$$

Or, d'après le cours, comme $\mathbb{R}_1[X]$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, l'ensemble $\left\{\|X^2 - P\|,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\right\}$ admet un minimum égal à la distance du vecteur X^2 au sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$, notée d. En particulier, $\boxed{\text{l'ensemble } A \text{ admet un minimum}}$, égal à d^2.

4.3. D'après le cours, on a $d = \|X^2 - p(X^2)\|$, où p désigne la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}_1[X]$.
D'une part, le projeté orthogonal $p(X^2)$ appartient à $\mathbb{R}_1[X]$ donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p(X^2) = aX + b$.
D'autre part, le vecteur $X^2 - p(X^2)$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$ donc $X^2 - aX - b$ est orthogonal

à 1 et à X. D'après la question **4.1.**, on a donc $(a, b) = (5, -2)$.
On a ainsi $d = \|X^2 - 5X + 2\|$ donc, par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} d^2 = \|X^2 - 5X + 2\|^2 &= (X^2|X^2) - 10(X^2|X) + 4(X^2|1) + 25(X|X) - 20(X|1) + 4(1|1) \\ &= S_4 - 10S_3 + 4S_2 + 25S_2 - 20S_1 + 4S_0 = 150 - 260 + 24 + 150 - 40 + 8 = 32\,. \end{aligned}$$

Par positivité de d, on en conclut qu'on a $\boxed{d = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}}$.