

Feuille d'exercices 3

Épreuves types - banque PT

Les exercices qui suivent sont tous des épreuves types d'oraux de concours banque PT

Exercice 1. Tri comptage. Épreuve type - Oral Banque PT

Soit N un entier naturel non nul. On cherche à trier une liste L d'entiers naturels strictement inférieurs à N .

1. Écrire une fonction comptage, d'arguments L et N , renvoyant une liste P dont le k -ième élément désigne le nombre d'occurrences de l'entier k dans la liste L .
2. Utiliser la liste P pour en déduire une fonction `tri`, d'arguments L et N , renvoyant la liste L triée dans l'ordre croissant.
3. Tester la fonction `tri` sur une liste de 20 entiers inférieurs ou égaux à 5, tirés aléatoirement.
4. Quelle est la complexité temporelle de cet algorithme ?

Exercice 2. Matrices magiques.....Épreuve type. Oral Banque PT

Une matrice carrée d'ordre n est dite magique si elle contient tous les nombres de 1 à n^2 et si les sommes des nombres de chaque ligne, de chaque colonne et de chaque diagonale sont toutes égales à une même constante s .

1. Au brouillon, exprimer la constante s en fonction de n .
2. Créer une fonction `EstMagique`, d'argument une matrice T (carrée de taille n) et qui renvoie un booléen indiquant si T est magique ou pas.

Tester cette fonction sur les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Une méthode permettant de construire une matrice magique de taille impaire $n = 2p+1$ est la suivante :

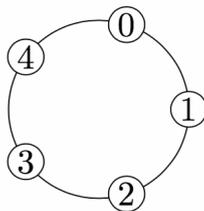
- on construit une matrice de taille n remplie de zéros. On considère cette matrice comme la représentation sur une période d'une matrice infinie n -périodique en lignes et en colonnes ;
- on remplace ensuite les zéros de la matrice avec les nombres de 1 à n^2 comme suit :
 - on met le 1 dans la case située sous la case centrale de la matrice,
 - on place ensuite chaque nombre de 2 à n^2 dans la case située ligne suivante et colonne suivante de celle où on a mis le nombre précédent. Si cette case est déjà remplie, on avance encore d'une ligne et on recule d'une colonne.

On admet que la matrice ainsi construite est magique.

3. Construire *à la main*, selon cette méthode, une matrice magique d'ordre 3.
4. Écrire une fonction `Magique` d'argument un entier p qui renvoie la matrice magique de taille $2p+1$ créée à l'aide de la méthode précédente.

Exercice 3. Élimination circulaire.....Épreuve type. Oral Banque PT

On considère n personnes numérotées de 0 à $(n - 1)$ disposées en cercle, comme le montre la figure suivante pour $n = 5$:



En commençant par la personne numéro 1 et en tournant dans le sens des numéros croissants (sens horaire sur la figure), on retire une personne sur deux, en ne prenant en compte que les personnes restant dans le cercle. Par exemple, pour $n = 5$, on retirera successivement les personnes 1, 3, 0 puis 4 ; il restera la personne 2.

Pour simuler cette procédure d'élimination progressive, on décrit le cercle par une liste de n booléens : la valeur numéro i est **True** si la personne i est éliminée, et **False** si elle est encore dans le cercle. Au départ, la liste ne contient que des **False** puis ses valeurs passent progressivement à **True**, jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul **False**. Ainsi, pour $n = 5$, la liste passe par les états successifs :

Liste de booléens E	Rang p du dernier élément éliminé
[False, True, False, False, False]	1
[False, True, False, True, False]	3
[True, True, False, True, False]	0
[True, True, False, True, True]	4

Il reste 2

- Écrire une fonction `suisvant` de deux arguments, une liste `E` de n booléens et un entier `p` entre 0 et $(n - 1)$ qui renvoie la position `q` du premier **False** rencontré en partant de la position juste après la position `p`, en parcourant la liste de façon circulaire. Par exemple :
`suisvant([True, True, False, True, False], 0)` donne 2 ;
`suisvant([True, True, False, True, False], 2)` donne 4 ;
`suisvant([True, True, False, True, False], 4)` donne 2.
- Se servir de la fonction `suisvant` pour simuler le cas $n = 5$ décrit dans le tableau ci-dessus.
- Écrire une fonction `reste` d'argument un entier naturel non nul n qui renvoie le numéro de la dernière personne restante parmi n personnes.
- Pour $2 \leq n \leq 140$, afficher n suivi du numéro du dernier restant. En observant le résultat, que peut-on conjecturer sur le calcul du dernier restant ?
- En supposant que la conjecture est exacte, deviner sans utiliser le programme Python quel sera le numéro du restant pour les valeurs de n : 256, 513, 1023, 1041.
- Écrire une fonction `reste2` qui renvoie pour n le résultat conjecturé, et comparer les résultats obtenus pour $n = 5104$.

Exercice 4. Calendrier grégorien.....Épreuve type. Oral Banque PT

On travaille avec des triplets (jour, mois, année) où jour et année sont des nombres entiers (avec la condition année > 1582 : date de mise en place du calendrier grégorien) et mois est une chaîne de caractères.

- Créer une liste notée `MC` contenant les mois de l'année qui ont 30 jours et une liste notée `ML` contenant les mois de l'année qui ont 31 jours.

2. On rappelle qu'une année est bissextile lorsqu'elle est divisible par 4 mais pas par 100, ou bien lorsqu'elle est divisible par 400. Créer une fonction `estBissextile` d'un argument `an` qui renvoie `True` si l'année `an` est bissextile et `False` sinon. Créer une fonction `longueurmois` de deux arguments `ms` et `an` qui renvoie le nombre de jours du mois `ms` de l'année `an`.
3. Créer une fonction `valide` de trois arguments `jr`, `ms`, et `an` qui renvoie `True` si le triplet `(jr,ms,an)` est valide et `False` sinon.
Par exemple, `valide(25, 'janvier', 1896)` devra renvoyer `True` alors que `valide(30, 'février', 1972)` devra renvoyer `False`.
4. Écrire une fonction `nab` de deux arguments `date1` et `date2` qui renvoie le nombre de "29 février" entre ces deux dates. `date1` et `date2` sont deux triplets sous la forme `(jr,ms,an)`.
5. Écrire une fonction `jours` de deux arguments `date1` et `date2` qui renvoie le nombre de jours séparant les deux dates.