

**Fiche d'Exercice n°9**

## Espaces probabilisés

**I. Dénombrement**

**Exercice 1.** Combien y a-t-il d'anagrammes (ayant un sens ou non) du mot :

- (a) chien ?                      (b) tableau ?                      (c) ananas ?

**Exercice 2.** Soit  $p, n \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq p \leq n$ .

- (a) Combien y a-t-il de parties de  $\llbracket 0, n \rrbracket$  de cardinal  $p + 1$  ?  
(b) En recomptant ces parties selon leur plus grand élément, montrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

**Exercice 3.** Un code PIN de carte bleue est composé de 4 chiffres.

- (a) Combien y a-t-il de codes PIN possibles ?  
(b) Combien y a-t-il de codes PIN dont tous les chiffres sont différents ?  
(c) Combien y a-t-il de codes PIN contenant exactement deux fois le chiffre 1 ?  
(d) Combien y a-t-il de codes PIN constitués à partir de deux chiffres exactement (par exemple 9191 ou 2333) ?

**Exercice 4.** Combien un village doit-il compter d'habitants pour être sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

**Exercice 5.**

- (a) Au Loto (ancienne version), on choisit 6 nombres différents entre 1 et 49. Combien y a-t-il de façons possibles de remplir la grille ?  
(b) A l'Euromillions, on choisit 5 nombres différents entre 1 et 50, et deux étoiles différentes entre 1 et 11. Combien y a-t-il de façons possibles de remplir la grille ?  
(c) Dans combien de grilles d'Euromillions, les 7 nombres choisis (les 5 premiers et les 2 étoiles) sont-ils distincts ?

**Exercice 6.** Au poker (fermé), chaque joueur reçoit une main de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il

- (a) de mains différentes ?

- (b) de mains contenant au moins un pique ?
- (c) de mains contenant un carré ?
- (d) de mains ne contenant pas de roi ?
- (e) de mains contenant un full ?
- (f) de mains contenant exactement un roi et un pique ?

**Exercice 7.** On considère une grille de 9 cases sur 9

- (a) Combien y a-t-il de façons de placer 9 chiffres 1 dans la grille ?
- (b) Combien y a-t-il de façons de placer 9 chiffres 1 dans la grille, de telle sorte qu'il y ait exactement un chiffre 1 par ligne et un par colonne ?
- (c) Combien y a-t-il de façons de placer 9 chiffres 1 dans la grille, en respectant les règles du Sudoku ?

## II. Probabilités

**Exercice 8.** M. et Mme Dupont ont deux enfants. On étudie l'univers des sexes possibles (garçon/fille) de ces enfants. On suppose que toutes les situations sont équiprobables. Quelle est la probabilité que les deux enfants Dupont soient des filles

- (a) sans aucune information ?
- (b) sachant que l'aînée est une fille ?
- (c) sachant que l'un des deux enfants est une fille ?

**Exercice 9.** Un élève est face à un QCM à 4 choix. Il connaît la bonne réponse avec probabilité  $1/2$  (et répond juste dans ce cas). Sinon, il répond au hasard. Quelle est la probabilité qu'il connaisse la bonne réponse sachant qu'il a répondu juste ?

**Exercice 10.** Trois urnes contiennent des boules blanches et noires :  $\mathcal{U}_1$  contient 2 blanches et 3 noires,  $\mathcal{U}_2$  contient 4 blanches et 2 noires et  $\mathcal{U}_3$  contient 6 blanches et 1 noire. On effectue trois tirages successifs selon le protocole suivant :

- On tire une boule de  $\mathcal{U}_1$ , on note sa couleur, puis on met cette boule dans  $\mathcal{U}_2$
- On tire une boule de  $\mathcal{U}_2$ , on note sa couleur, puis on met cette boule dans  $\mathcal{U}_3$
- On tire une boule de  $\mathcal{U}_3$  et on note sa couleur.

Déterminer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.

**Exercice 11.** Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour  $n$ , il y a une probabilité  $4/10$  que quelqu'un la réserve au jour  $n+1$ . En revanche, si elle est réservée au jour  $n$ , elle reste réservée au jour  $n+1$  avec probabilité  $9/10$ . On note  $p_n$  la probabilité que la place soit réservée au jour  $n$ .

- (a) Exprimer  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b) En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'expression de  $p_n$ , puis sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$

**Exercice 12.** On considère une pièce qui tombe sur Pile avec probabilité  $p \in [0, 1]$ . On lance deux fois la pièce, de façon indépendante. On considère les événements  $A$  : «Les deux résultats sont identiques» et  $B$  : Le premier lancer de pièce donne Face».

Pour quelles valeurs de  $p$  ces deux événements sont-ils indépendants ?

**Exercice 13.** Un système comprenant  $n$  composants est appelé système en parallèle s'il fonctionne dès qu'au moins l'un des composants fonctionne. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on suppose que le  $i$ -ème composant d'un tel système fonctionne indépendamment de tous les autres avec une probabilité  $p_i$ .

- Quelle est la probabilité que le système fonctionne ?
- Même question si les composants sont placés en série.

**Exercice 14.** Deux urnes  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  contiennent, respectivement, 9 boules blanches et une noire pour la première, 3 boules blanches et 7 noires pour la deuxième.

On lance un dé à 6 faces équilibré. S'il tombe sur 1, on effectue deux tirages successifs avec remise dans l'urne  $\mathcal{U}_1$ , sinon on effectue deux tirages successifs avec remise dans l'urne  $\mathcal{U}_2$ .

- Les événements  $B_1$  : «on obtient une boule blanche au premier tirage» et  $N_2$  : «On obtient une boule noire au deuxième tirage» sont-ils indépendants ?
- On note  $U_1$  l'événement : «on a effectué le tirage dans l'urne  $\mathcal{U}_1$ ». Comparer  $\mathbb{P}(U_1)$  et  $\mathbb{P}_{B_1}(U_1)$ . Quel rapprochement peut-on faire entre les deux questions ?

**Exercice 15.** On considère une urne constituée de  $b$  boules blanches et  $n$  boules noires. On pioche successivement et sans remise des boules dans l'urne. On s'arrête quand toutes les boules blanches ont été tirées. Quelle est la probabilité que toutes les boules aient été tirées ?

**Exercice 16.** On considère  $\mathbb{P}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$  et  $\mathbb{P}$  est  $\sigma$ -additive. Montrer que  $\mathbb{P}$  définit une probabilité sur  $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ .

**Exercice 17.** Soit  $(a_n)$  une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle. Déterminer  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel qu'il existe une probabilité  $P$  sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  vérifiant  $P(\llbracket n, +\infty \rrbracket) = \lambda a_n$ .

**Exercice 18.** On lance un dé équilibré à 5 faces (ça n'existe pas vraiment...) un grand nombre de fois. On note  $p_n$  la probabilité que la somme des  $n$  premiers lancers soit paire. Calculer  $p_1$ , puis  $p_{n+1}$  en fonction de  $p_n$ , puis déterminer le terme général de  $(p_n)$ .

**Exercice 19.**

- Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n}$  est convergente et que sa somme vaut  $\ln(2)$ .
- Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un premier Pile. S'il a fallu  $n$  lancers pour obtenir Pile, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi  $n$  billets dont un seul est gagnant.  
Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?
- Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu son premier Pile lors du 3ème lancer ?

**Exercice 20.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements presque certains (i.e. tels que  $\forall n \geq 0, \mathbb{P}(A_n) = 1$ ) et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements presque impossibles (i.e. tels que  $\forall n \geq 0, \mathbb{P}(B_n) = 0$ ). Montrer que

- (a)  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$  est un événement presque impossible.
- (b)  $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$  est un événement presque certain.

**Exercice 21.** Deux joueurs  $A$  et  $B$  jouent aux fléchettes avec les règles suivantes :

Le joueur  $A$  commence à jouer. Dès que l'un des joueurs atteint le centre de la cible, il a gagné et le jeu s'arrête.

Le joueur  $A$  touche le centre de la cible avec une probabilité  $p_A \in ]0, 1[$ , le joueur  $B$  avec une probabilité  $p_B \in ]0, 1[$  et tous les tirs sont indépendants.

On note  $G_A$  l'événement «  $A$  gagne » et  $G_B$  l'événement «  $B$  gagne ».

- (a) Déterminer la probabilité que  $A$  gagne au tour  $2n + 1$
- (b) Déterminer la probabilité que  $B$  gagne au tour  $2n + 2$
- (c) En déduire  $p(G_A)$ ,  $p(G_B)$  et la probabilité que le jeu dure indéfiniment.
- (d) On dit que le jeu est équitable lorsque  $p(G_A) = p(G_B)$ . Montrer que le jeu est équitable si et seulement si  $p_B = \frac{p_A}{1-p_A}$ . Que peut-on dire si  $p_A > 1/2$  ?

**Exercice 22.** Un singe (immortel) tape au hasard sur les touches d'une machine à écrire indéfiniment. Montrer que la probabilité qu'il tape *Le complot contre l'Amérique* est de 1.

**Exercice 23.** On lance indéfiniment une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir Pile à tous les lancers ?

**Exercice 24.** Une urne  $\mathcal{U}$  contient 1 jeton '1', 2 jetons '2', ...,  $n$  jetons ' $n$ '.

Puis  $n$  urnes  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$  sont telles que chaque urne  $\mathcal{U}_i$  contient  $n$  boules :  $i$  boules blanches et  $n - i$  boules noires.

Principe du tirage : on tire un jeton dans  $\mathcal{U}$ . Si le résultat est  $i$ , on tire une boule dans l'urne  $\mathcal{U}_i$ .

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Quelle est la probabilité d'avoir tiré le jeton 1 sachant qu'on a obtenu une boule blanche ?

**Exercice 25.** On lance une pièce avec une probabilité  $p$  de faire «Pile». On note  $A_n$  l'événement «on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du  $n$ -ième lancer » et on désire calculer sa probabilité  $a_n$ .

- (a) Déterminer  $a_1, a_2$  et  $a_3$ .
- (b) Exprimer  $a_{n+2}$  en fonction de  $a_n$  et  $a_{n+1}$  pour  $n \geq 1$ .
- (c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.

**Exercice 26.** On se donne  $N + 1$  urnes numérotées de 0 à  $N$ . L'urne de numéro  $k$  contient  $k$  boules blanches et  $N - k$  boules noires. On choisit une urne au hasard, chaque choix étant équiprobable. Dans l'urne choisie, on tire des boules avec remise.

- (a) Quelle est la probabilité que la  $n + 1$ -ième boule tirée soit blanche sachant que les  $n$  précédentes l'étaient toutes ?
- (b) Quelle est la limite de la probabilité précédente lorsque  $N \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 27.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements mutuellement indépendants de l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On considère l'évènement

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n$$

dont la réalisation signifie qu'une infinité des évènements  $A_n$  sont réalisés.

- (a) On suppose la convergence de la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$ .  
Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 0$ .
- (b) À l'inverse, on suppose la divergence de la série  $\sum \mathbb{P}(A_n)$ .  
Montrer que  $\mathbb{P}(A) = 1$ .  
Ce résultat s'appelle la loi du zéro-un de Borel.  
Pour le b), on pourra montrer  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=p}^N \bar{A}_n\right) \leq \exp\left(-\sum_{n=p}^N \mathbb{P}(A_n)\right)$  en utilisant (après l'avoir justifié) la relation  $1 - x \leq e^{-x}$ .

**Exercice 28.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements mutuellement indépendants.

- (a) Démontrer

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\bar{A}_k)$$

- (b) On suppose  $\mathbb{P}(A_n) \neq 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
- (i)  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$ ;
  - (ii)  $\sum \ln(\mathbb{P}(\bar{A}_n))$  diverge ;
  - (iii)  $\sum \mathbb{P}(A_n)$  diverge.

**Exercice 29.** Trois joueurs  $A, B$  et  $C$  s'affrontent à un jeu selon les règles suivantes :

- à chaque partie deux joueurs s'affrontent et chacun peut gagner avec la même probabilité ;
- le gagnant de la partie précédente et le joueur n'ayant pas participé s'affrontent à la partie suivante.

Est déclaré vainqueur celui qui gagne deux parties consécutives.

- (a) Établir que le jeu s'arrête presque sûrement.
- (b)  $A$  et  $B$  s'affrontent en premier. Quelles sont les probabilités de gain de chaque joueur ?

**Exercice 30.** Deux joueurs  $A$  et  $B$  s'affrontent en des parties indépendantes. Le joueur  $A$  dispose d'une fortune égale à  $n$  brouzoufs tandis que le joueur  $B$  dispose de  $N - n$  brouzoufs. À chaque tour, le joueur  $A$  a la probabilité  $p \in ]0; 1[$  de l'emporter et le joueur  $B$  a la probabilité complémentaire  $q = 1 - p$ . Le joueur perdant cède alors un brouzouf au vainqueur. Le jeu continue jusqu'à la ruine d'un des deux joueurs.

On note  $a_n$  la probabilité que le joueur  $A$  l'emporte lorsque sa fortune initiale vaut  $n$ .

(a) Que valent  $a_0$  et  $a_N$ ? Établir la formule de récurrence

$$\forall n \in \llbracket 1; N - 1 \rrbracket, a_n = pa_{n+1} + qa_{n-1}$$

(b) En déduire que la suite  $(u_n)_{1 \leq n \leq N}$  définie par  $u_n = a_n - a_{n-1}$  est géométrique.

(c) Calculer  $a_n$  en distinguant les cas  $p = q$  et  $p \neq q$ .

(d) Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement.

**Exercice 31.** Dans une population, la probabilité  $p_n$  qu'une famille ait  $n$  enfants est donnée par la formule

$$p_n = a \frac{2^n}{n!} \text{ avec } a > 0$$

(a) Déterminer la valeur de  $a$ .

On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou garçon.

(a) Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.

(b) On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants?