

Fiche d'Exercice n°8

Séries entières

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes. Etudier la nature de la série sur le cercle d'incertitude.

- (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} z^n$ (b) $\sum n! z^n$ (c) $\sum \frac{z^{2n}}{4^n}$ (d) $\sum \frac{n^2}{3^n + n} z^n$ (e) $\sum_{n \geq 1} \frac{\text{ch}(5n)}{\text{sh}^2(n)} z^{3n}$
 (f) $\sum \frac{n^3}{n!} z^n$ (g) $\sum n^{(-1)^n} z^n$ (h) $\sum e^{\cos(n)} z^n$ (i) $\sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) z^{3n}$
 (j) $\sum \frac{n!}{(2n)^n} z^{2n}$ (k) $\sum \sin(n) z^n$ (l) $\sum_{n \geq 1} \ln(n) z^n$ (m) $\sum \binom{2n}{n} z^n$

Exercice 2. On considère la suite réelle (a_n) définie par $a_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$$

- (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$
 (b) Montrer que (a_n) est décroissante
 (c) En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite
 (d) En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

- (a) Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de $\sum P(n) a_n z^n$.
 (b) Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^{2n}$ et $\sum a_n^2 z^n$.

Exercice 4. Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 5. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . On pose $b_n = \frac{a_n}{1 + |a_n|}$. Soit R' le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

- (a) Montrer que $R' \geq \max(1, R)$.
 (b) Lorsque $R' > 1$, montrer que $R' = R$.
 (c) En déduire que $R' = \max(1, R)$.

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence puis la somme de la série entière

- (a) $\sum n^3 x^n$
- (b) $\sum \operatorname{ch}(n) x^n$
- (c) $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ (on pourra séparer les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$ pour le calcul de la somme)
- (d) $\sum_{n \geq 1} H_n x^n$, où $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- (e) $\sum \frac{(n+1)(n-2)}{n!} x^n$.

Exercice 7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier la convergence puis déterminer la somme de la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{2^n n!}$

Exercice 8. Justifier l'existence puis déterminer les développements en série entière des fonctions suivantes :

- (a) $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$
- (b) $f : x \mapsto \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$
- (c) $f : x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$
- (d) $f : x \mapsto \cos(x)e^x$
- (e) $f : x \mapsto \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$
- (f) $f : x \mapsto \operatorname{Arctan} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$ (On pourra dériver f)
- (g) $f : x \mapsto \frac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}$ (On pourra trouver une primitive de f)

Exercice 9. On pose : $\forall z \in \mathbb{C}, c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ et $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, c^2(z) + s^2(z) = 1$

Exercice 10. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f . Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de $f(z)$ et $f(-z)$, pour $|z| < R$.

Exercice 11. Pour x réel, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$.

- (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f .
- (b) Préciser l'intervalle de définition de f .

- (c) Établir la continuité de f sur son domaine de définition. (On pourra montrer la convergence uniforme de la série de fonctions sur $[0,1]$.)
- (d) Montrer que, pour $x \in]-1, 0]$, $f(x) \geq -\ln(1+x)$. En déduire la limite de f en -1 .

Exercice 12. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan} x \, dx$. En déduire la valeur de cette somme.

Exercice 13.

- (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- (b) Montrer qu'il en est de même de la fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x - 1}$.

Exercice 14. On considère $f : x \mapsto \frac{x}{1-x-x^2}$. On admet que f est développable en série entière.

En utilisant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$, déterminer le développement en série entière de f

Exercice 15. Déterminer les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle $x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$.

Exercice 16. Soit $f : x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$

- (a) Montrer que f est solution d'un problème de Cauchy à déterminer.
- (b) Déterminer le développement en série entière de f .

Exercice 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

- (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n+1}$
- (b) Montrer que la somme de cette série entière est solution sur $] -R, R[$ de l'équation différentielle $(E) : (1-x^2)y' - xy = 1$.

- (c) Résoudre (E) sur $] -R, R[$ et en déduire une expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.