Exercice 1. (Éléments de correction).

a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3} z^n$; $R = 1$: par exemple avec d'Alembert.

Pour $|z| = 1$, $\left|\frac{z^n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$ il y a donc convergence partout (par comparaison avec une série de riemann) sur le cercle d'incertitude.

(b) $\sum n! z^n$: $R = 0$ (d'Alembert).

Il y a convergence sur le cercle d'incertitude, c'est à dire pour $z = 0$.

(c) $\displaystyle\sum \frac{z^{2n}}{4^n}$; on commence par calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{z^n}{4^n}$ et on obtient (d'Alembert) pour rayon 4 donc :

$$|z| < \sqrt{4} = 2 \implies |z^2| < 4 \implies \sum \frac{z^{2n}}{4^n} \text{ converge}$$
$$|z| > \sqrt{4} = 2 \implies |z^2| > 4 \implies \sum \frac{z^{2n}}{4^n} \text{ diverge}$$

Avec le lemme d'Abel, $R = 2$.

Sur le cercle d'incertitude ; soit $z = 2e^{i\theta}$, alors $\sum \frac{z^{2n}}{4^n} = e^{ni\theta}$ qui est une somme géométrique divergente. Il y a donc divergence partout sur le cercle d'incertitude.

(d) $\displaystyle\sum \frac{n^2}{3^n + n} z^n$; $\frac{n^2}{3^n+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3^n}$ et avec d'Alembert on obtient $R = 3$.

Sur le cercle d'incertitude : si $z = 3e^{i\theta}$, $\frac{n^2}{3^n+n} z^n \underset{n}{\sim}{}^2\, e^{ni\theta}$ et il y a donc divergence grossière partout sur le cercle d'incertitude.

(e) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}(5n)}{\mathrm{sh}^2(n)} z^{3n}$; on commence par déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}(5n)}{\mathrm{sh}^2(n)} z^n$: on a $\frac{\mathrm{ch}(5n)}{\mathrm{sh}^2(n)} \sim 2e^{3n}$ et on obtient en appliquant d'Alembert pour rayon de convergence $R = 1/e^3$. On en déduit par le même argument qu'en (c) grâce au lemme d'Abel que $R = 1/e$.

(f) $\displaystyle\sum \frac{n^3}{n!} z^n$; $R = +\infty$ (appliquer d'Alembert ou utiliser le rayon de convergence de la série de exp et le fait que $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon.)

(g) $\sum n^{(-1)^n} z^n$; cet exemple est intéressant car soit $a_n = n^{(-1)^n}$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = (n(n+1))^{(-1)^{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{n(n+1)} & \text{si } n \text{ pair} \\ n(n+1) & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{n'a pas de limite}$$

et donc d'Alembert ne s'applique pas.

De $a_n \leqslant n$ et $\sum n z^n$ de rayon 1, on déduit $R \geqslant 1$.

De $a_n \geqslant \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{z^n}{n}$ de rayon 1, on déduit $R \leqslant 1$.

Ainsi $R = 1$.

Il y a divergence grossière sur tout le cercle d'incertitude puisque $n(-1)^n e^{in\theta}$ ne tend pas vers 0 car sa suite extraite de rang pair est égale à $2ne^{2ni\theta}$ dont le module tend vers $+\infty$.

(h) $\sum e^{\cos(n)} z^n$; de $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$ on déduit $\frac{1}{e} \leqslant \cos(n) \leqslant e$ t donc $R = 1$.

Sur le cercle d'incertitude, $z = e^{i\theta}$:

$$e^{\cos(n)} z^n = e^{\cos(n) + in\theta} \quad \text{et} \quad \left|e^{\cos(n)+in\theta}\right| \geqslant \frac{1}{e}$$

il y a donc partout divergence grossière.

(i) $\displaystyle\sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) z^{3n}$; de $\sin\frac{1}{3^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$ on déduit que la série $\displaystyle\sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) z^n$ a pour rayon 3 ; ainsi $R = \sqrt[3]{3}$ puisque :

$$|z| < \sqrt[3]{3} \implies |z^3| = |z|^3 < 3 \implies \sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) z^{3n} \text{ cvge} \implies R \geqslant \sqrt[3]{3}$$
$$|z| > \sqrt[3]{3} \implies |z^3| = |z|^3 > 3 \implies \sum \sin\left(\frac{1}{3^n}\right) z^{3n} \text{ dvge} \implies R \leqslant \sqrt[3]{3}$$

(j) $\displaystyle\sum \frac{n!}{(2n)^n} z^{2n}$

(k) $\sum \sin(n) z^n$

(l) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln(n) z^n$

(m) $\displaystyle\sum \binom{2n}{n} z^n$