

Fiche d'Exercice n°7

Suites et Séries de fonctions

I. Suites de fonctions

Exercice 1. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g ; montrer que pour tout $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2)$, $(\lambda.f_n + \mu.g_n)$ converge uniformément vers $\lambda.f + \mu.g$.

Exercice 2. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg .

Exercice 3. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a, b]$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers une fonction f . Montrer que $\inf_{[a,b]} f_n \rightarrow \inf_{[a,b]} f$.

Exercice 4. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si (x_n) désigne une suite d'éléments de $[a, b]$ convergeant vers $x \in [a, b]$, alors : $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = x^n \ln(x)$ avec $x \in]0, 1]$ et $u_n(0) = 0$. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ sur $[0, 1]$.

Exercice 6. On pose $f_n(x) = nx^2 e^{-nx}$, avec $x \in \mathbb{R}_+$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7. On pose $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $] -\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 8. On pose $u_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$, avec $x \in \mathbb{R}_+$.

- a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0, +\infty[$.
- b) Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
- c) Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9. On pose $f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ et $f_n(0) = 0$.

- a) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
- b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.
On rappelle que $\forall t \in \mathbb{R}, |\sin t| \leq |t|$.

Exercice 10. Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par $f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x)$.

Exercice 11. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$.

- Déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
- Soit $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \right\}$; y a-t-il convergence uniforme de (f_n) sur A ?
- Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, +\infty[$, pour $a > 0$.

Exercice 12. Soit (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ puis sur $] -\infty, a] \cup [a, +\infty[$, pour $a > 0$.

Exercice 13. On pose $f_n(x) = 4^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ pour $x \in [0, 1]$. Etudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$ puis sur $[0, a]$ avec $0 \leq a < 1$.

Exercice 14. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^\alpha x(1 - x)^n$.

- Etudier la limite simple de (f_n) .
- Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ y a-t-il convergence uniforme?

Exercice 15. Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f_n(x) = n^2 x(1 - nx)$ si $x \in [0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

- Etudier la limite simple de la suite (f_n) .
- Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ?
- Etudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$, avec $a > 0$.

Exercice 16. Pour $x \in [0, \pi/2]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.

- Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n) .
- Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ?
- Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0, \pi/2]$.

Exercice 17.

- Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
- Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n} e^{-nx}) dx$.

Exercice 18. Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2) .

Exercice 19. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$. Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ mais que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 20. Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ décroissante telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 21. On définit (u_n) suite de fonctions de $[0, 1]$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2) dt$$

- Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$
- En déduire la convergence, pour tout $x \in [0, 1]$, de la suite $(u_n(x))$.
- Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 22. On étudie l'équation fonctionnelle $(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$

- Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?
- Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur h la fonction f est-elle solution de (E) ?
- On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $h_0 : x \mapsto 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.
Pour $x \in [0, 1]$, soit $T_x : y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0, 1]$ et que $T_x([0, 1]) \subset [0, 1]$.
Montrer que la suite (h_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.
- Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0, 1]$.
- Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23.

- Étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite de fonctions définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f_n(x) = (n+1) \cos^n x \sin x$.
- Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$

Exercice 24. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Exercice 25. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $I =]-\pi, \pi[$ par $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n \sin x}$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$

- Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction nulle.
- Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de la forme $J = [a, \pi - a]$, avec $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

c) La convergence est-elle uniforme sur I ? On calculera $f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

II. Séries de fonctions

Exercice 26. Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}, \text{ avec } n \geq 1, x \in \mathbb{R}$$

Exercice 27. Etudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}, \text{ avec } n \geq 1, x \in \mathbb{R}$$

Exercice 28. Soit $\alpha > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = x^\alpha e^{-n^2 x}$. On posera $u_n(0) = 0$.

- Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?
- Montrer que, pour tout $\alpha > 0$, la convergence de la série est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 29. Soit α un réel. On pose $f_n(x) = n^\alpha x^n (1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$. Etudier le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n) puis de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 30. Soit $u_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1 + n^2 x)^2}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

- Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{On note } S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

- Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 31. Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

- Déterminer les domaines de définition de ζ et η .
- Justifier que les fonctions ζ et η sont continues.
- Etablir la relation $\eta(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 32. On pose $u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$ pour $x \in]0, 1]$ et $u_n(0) = 0$.

- Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$
- Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.
- En déduire l'égalité $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Exercice 33. Soit (a_n) une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$, avec $x \in [0, 1]$.

- Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.
- Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série numérique $\sum \frac{a_n}{n}$.

Exercice 34. On introduit l'application sur $[0, +\infty[$ par $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

- Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer la convergence normale de $\sum f_n$ sur $[0, a]$, pour $a > 0$.
- Etudier la convergence $\sum f_n(n)$. Y a-t-il convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 35. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}$.

- Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que S est continue.
- Etudier la monotonie de S .

Exercice 36. Sur $I =]-1, +\infty$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

- Montrer que S est définie et continue sur I .
- Etudier la monotonie de S .
- Calculer, pour $x \in I$, $S(x+1) - S(x)$.
- Montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow -1^+}{\sim} \frac{-1}{x+1}$.
- Etablir $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 37. Pour $x \geq 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$.

- Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}_+$, $S(x)$ est-elle définie ?
- Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.
- Etudier la continuité de S sur $[0, 1[$ puis sur $]1, +\infty[$.

Exercice 38. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$.

- Déterminer le domaine de définition I de S .
- Etudier la continuité et la dérivabilité de S sur I .

Exercice 39. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

- a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 40. Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nx)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 41. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \operatorname{Arctan}(\sqrt{n+x}) - \operatorname{Arctan}(\sqrt{n})$.
Etudier l'existence et la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer $|u_n(x)|$.

Exercice 42. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2x}$ lorsque la série est convergente.

- a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?
- b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier naturel k , exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'une série.
- c) Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 43. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

- a) Déterminer l'ensemble de définition I de $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- b) Montrer que f est continue sur I .
- c) Encadrer $f(x)$ par des intégrales.
- d) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 44. On étudie $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$.

- a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- b) Donner, à l'aide d'une comparaison à une intégrale, un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
- c) On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0.

Exercice 45. Pour $t > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$.

- a) Justifier que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Etablir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 46. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}$.

a) Montrer que S est bien définie et étudier sa parité.

b) Montrer que la fonction S est continue.

Exercice 47. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$

a) Justifier que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Etablir que pour tout $x \neq 0$, $f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

c) Etablir que f est continue sur $] -1, 1[$, puis sur $] -\infty, -1[$ et sur $]1, +\infty[$.

d) Etablir la continuité de f en 1.

Exercice 48. Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x , on pose $u_n(x) = \frac{n^\alpha x e^{-nx}}{n^2 + 1}$. On note I le domaine de définition de $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

a) Déterminer I .

b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 49. Etudier la définition, la continuité et la dérivabilité de $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right)$.

Exercice 50. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Préciser le sens de variation de S .

c) Calculer $S(x) + S(x+1)$, pour $x > 0$.

d) Montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

e) Justifier que, pour tout $x > 1$, $\frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$.

f) En déduire un équivalent simple de $S(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.