

Ex 7

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$n \neq 0 \quad f_n(x) \rightarrow 0$$

$$n = 0 \quad f_n(x) = 1 \rightarrow 1.$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas de suite f_n dans C^0 et f_n dans C^0 .

$$a) \text{ sur }]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[\quad \sup |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+a^2)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \text{sur }]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[.$$

Ex 9

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) $x > 0$ pour $x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n} \rightarrow 0$

$\Rightarrow$ CVS vers $f: x \mapsto 0$
 $x_n = n \quad f_n(x_n) = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 \neq 0$

il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}_+$.

b) sur $[-a, a]$.

$$|f_n(x) - 0| \leq \left| \frac{x^2}{nn} \right| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|a|}{n} \rightarrow 0$$

il y a CVU sur $[-a, a]$.

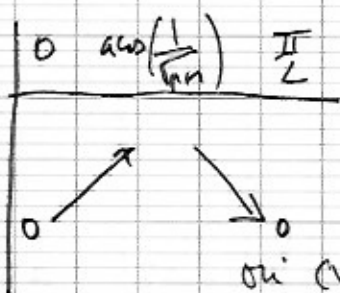
Ex 10

$$f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

• n pair $x \equiv \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad f_n(x) = 0$
 $x \neq \pm \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \sin^n(x) \cos(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

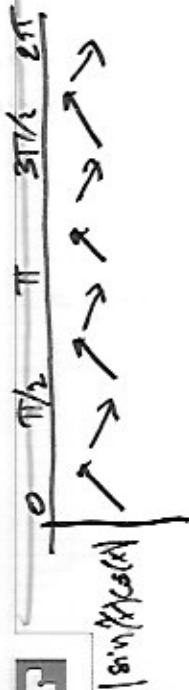
$\Rightarrow f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ CVS

• CVU ? $f'_n(x) = n \sin^{n-1}(x) \cos^2(x) - \sin^n(x) \sin(x)$
 $= \sin^{n-1}(x) [n \cos^2(x) - \sin^2(x)]$
 $= \sin^{n-1}(x) [(n+1) \cos^2(x) - 1]$



$x_n = \arccos\left(\frac{1}{n+1}\right)$
 $f_n(x_n) = \left[\sqrt{\frac{n}{n+1}} \right]^n \times \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

ou CVU sur $[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow$ sur $\mathbb{R}$ par périodicité.



Ex 11

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}$$

2) $x > 0 \quad f_n(x) \rightarrow 0 \quad \text{par C.C.}$

$x < 0 \quad f_n(x) \rightarrow +\infty$

$x = 0$ pos. défini. se prolonge par continuité en
 $\lim_{n \rightarrow 0} f_n(x) = x.$

b) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0\} = \mathbb{N}_+^*$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} e^{-1}}{1 - e^{-\frac{1}{n^2}}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n} e^{-1}}{\frac{1}{n^2}} \sim \frac{1}{e} \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas CVU sur $\mathbb{N}_+^*$.

c) soit $a > 0$ sur $[a; +\infty[$

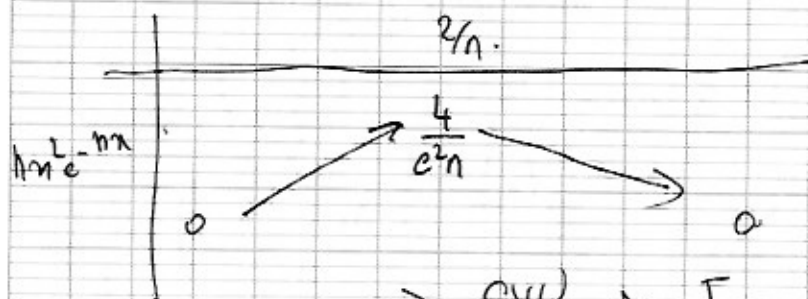
$$\begin{aligned} x \geq a &\Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow -x^2 \leq -a^2 \\ &\Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-a^2} \\ &\Rightarrow -e^{-x^2} \geq -e^{-a^2} \\ &\Rightarrow 1 - e^{-x^2} \geq 1 - e^{-a^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1 - e^{-x^2}} \leq \frac{1}{1 - e^{-a^2}} \end{aligned}$$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-a^2}} \leq \frac{4}{ne^2} \times \frac{1}{1 - e^{-a^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\begin{aligned} (nx^2 e^{-nx})' &= n(2x e^{-nx} - nx^2 e^{-nx}) \\ &= nx e^{-nx} (2 - nx) \end{aligned}$$

$$2 - nx > 0$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{2}{x}$$



$\Rightarrow$ CVU sur $[a; +\infty[$ $a > 0$

Ex 10

$$f_n(x) = 4^n (x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \quad x \in [0, 1]$$

$$\begin{aligned} &= e^{n \ln 4} x \left(e^{2^n \ln(x)} - e^{2^{n+1} \ln(x)} \right) \\ &= e^{n \ln 4} x \left(x^{2^n} - x^{2^n \times 2} \right) \\ &= e^{n \ln 4} x^{2^n} x \left(1 - x^{2^n} \right) \\ &= e^{n \ln 4 + 2^n \ln(x)} x \left(1 - x^{2^n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \ln 4 + 2^n \ln(x) &\rightarrow -\infty \quad \text{si } 0 < x < 1 \\ \Rightarrow \quad x^{2^n} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \quad f_n(x) &\rightarrow 0 \quad \text{si } 0 < x < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } f_n(0) &= f_n(1) = 0 \\ \Rightarrow f_n &\xrightarrow{r} 0. \end{aligned}$$

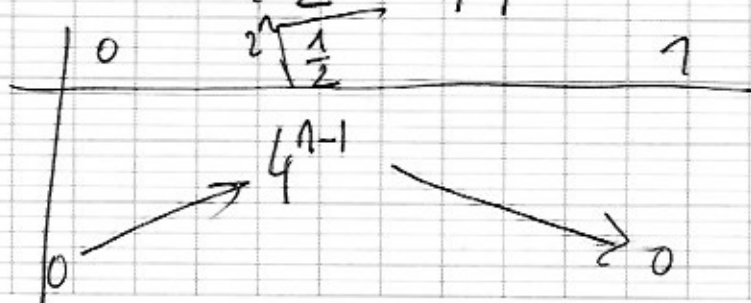
$$\begin{aligned} f'_n(x) &= 4^n (2^n x^{2^n-1} - 2^{n+1} x^{2^{n+1}-1}) \quad 0 < x < 1 \\ &= 4^n \times 2^n \times x^{2^n} \times \left(\frac{1}{x} - 2 x^{2^n-1} \right) \\ \frac{1}{x} - 2 x^{2^n-1} &> 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - 2 x^{2^n}}{x} > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 x^{2^n} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2^n} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x < \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}} = x_n$$

$$f_n(x_n) = 4^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 4^{n-1}$$



pas CVU
sur $[0, 1]$

On $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2^n}} = e^{-\frac{1}{2^n} \ln(2)} \rightarrow 1$

Donc il n'y a pas CVU sur $[0, \alpha[\quad \forall \alpha > 0$

Ex 14

$\alpha \in \mathbb{R} \quad f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f_n(x) = n^\alpha x (1-x)^n$

a) $f_n(0) = f_n(1) = 0$ car $n > 0$

n fixe : par CC $f_n(x) \rightarrow 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{c} 0$ sur $[0, 1]$.

b) $f'_n(x) = n^\alpha [(1-x)^n + n x (1-x)^{n-1}]$
 $= n^\alpha (1-x)^{n-1} [1-x + nx]$
 $= n^\alpha (1-x)^{n-1} [1 + (n-1)x]$

$f'_n(x) > 0$ car $1 + (n-1)x > 0$
 $x < \frac{1}{n-1} = x_n$

$f_n(x_n) = n^\alpha \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$
 $= n^\alpha \frac{1}{n-1} \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^n$

$f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\alpha < 1$.

Il n'y a pas CVU sur $\mathbb{R}^+ \quad \alpha < 1$

Ex 16

$$x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f_n(x) = x \sin x \cos^n x$$

$$2) f_n(0) = f_n(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par c.c.}$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{s} 0.$$

$$\begin{aligned} b) \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 x \sin x \cos^n(x) dx \\ &= \left[-\frac{x}{n+1} \cos^{n+1}(x) \right]_0^1 \\ &= 1 \times 1 - \frac{\cos^{n+1}(1)}{n+1} \rightarrow 1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas CUV sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} c) f'_n(x) &= x (\cos^{n+1}(x) - n \cos^{n-1}(x) \sin^2(x)) \\ &= x \cos^{n-1}(x) [\cos^2(x) - n \sin^2(x)] \\ &= \underbrace{x \cos^{n-1}(x)}_{\geq 0} [1 - (n+1) \sin^2(x)] \end{aligned}$$

$$f'_n(x) \geq 0 \text{ si}$$

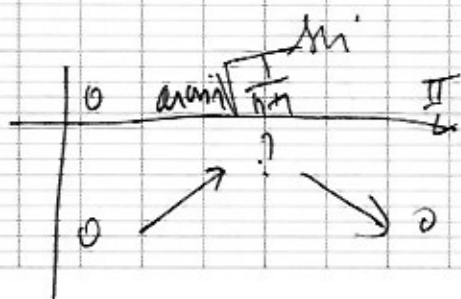
$$\sin^2(x) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$1 - (n+1) \sin^2(x) \geq 0$$

$$\sin^2(x) \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\sin(x) \leq \sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{car } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin(x) \geq 0$$



pour $n > 0$ et $[a, b] \subset]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\max |f_n(u)| = f_n(a) = n \sin a \cos^n a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

car CC.

$\Rightarrow$ CUV sur tout $\mathbb{R}^+$.

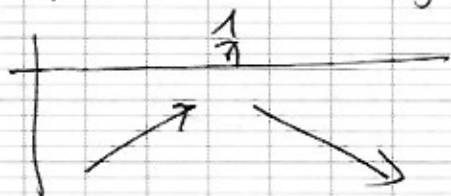
Ex 17

$$f_n(u) = u(1 + u^\alpha e^{-nu}) \quad u \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$f_n \xrightarrow{s} 0$ par CC pour $n > 0$ et $f_n(0) = 0$

$$\begin{aligned} f_n'(u) &= (1 + u^\alpha e^{-nu}) - u \times \alpha u^{\alpha-1} e^{-nu} \\ &= 1 + u^\alpha e^{-nu} [1 - \alpha u]. \end{aligned}$$

$$f_n(u) \leq u^\alpha e^{-nu} = g_n(u) \quad g_n'(u) = u^{\alpha-1} e^{-nu} (1 - nu)$$



$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\alpha-1} e^{-1}$$

$\Rightarrow$ si $\alpha < 1 \Rightarrow$ CUV

• si $\alpha \geq 1$ $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} (1 + n^\alpha e^{-1})$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha-1}}{e} \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas CUV pour $\alpha \geq 1$.

Ex 18

$$f_n: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = x + \frac{1}{n} \xrightarrow{sr} (x \mapsto x)$$

$$\sup_{\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ CUV sur $\mathbb{R}_+$.

$$f_n^2: x \mapsto x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{sr} (x \mapsto x^2)$$

$$|f_n^2(x) - f^2(x)| = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$x_n = n^2 \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| = 2n + \frac{1}{n^2} \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas CUV sur $\mathbb{R}_+$

(mais il y a CUV sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$)

Ex 19

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \text{ de classe } C^1 //$$

(fait au cours : CUV les $x \mapsto |x|$)

$$\text{car: } \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \rightarrow 0 //$$

Ex 22

$$(E) \quad f(2n) = 2f(n) - 2f(n)^2$$

2) $f = c$ est une solution de (E)

$$\Leftrightarrow c = 2c - 2c^2 \Leftrightarrow 2c^2 - c = 0$$

$$f \text{ est } = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow c(2c-1) = 0$$

sont les solutions de (E) ,
c'est

b) $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(n) = n h(n)$

$$f \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2n h(2n) = 2n h(n) - 2n^2 h(n)^2 \\ n \neq 0 \\ h(2n) = h(n) - n h(n)^2 \end{cases}$$

$$f \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{R}^* \quad h(2n) = h(n) - n h(n)^2$$

$f = n \cdot h$

c) $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par:

$$h_0: n \mapsto 1 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad h_{n+1}(n) = h_n\left(\frac{2n}{2}\right) - \frac{n}{2} h_n\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$n \in [0, 1] \quad T_n: y \mapsto y - \frac{ny^2}{2}$$

$$\text{soit } y, y' \in [0, 1] \quad |T_n(y') - T_n(y)| = \left| y' - \frac{ny'^2}{2} - y + \frac{ny^2}{2} \right|$$

$$|T_n(y') - T_n(y)| = \left| (y' - y) \times \left[1 - \frac{n}{2}(y + y') \right] \right|$$

$$\leq |y' - y| \times \left| 1 - \frac{n}{2}(y + y') \right|$$

On pose $x \in [0,1]$ et $y, y' \in [0,1]$

$$\left| 1 - \frac{n}{2}(y+y') \right| \leq 1$$

$$\Rightarrow \forall y, y' \in [0,1] \quad |T_n(y') - T_n(y)| \leq 1$$

$\Rightarrow T_n$ est 1-lipschitzienne.

$$\text{On } T_n(0) = 0$$

$$\text{et } T'_n(y) = 1 - ny \geq 0$$

$\Rightarrow T_n$ croissante et $\forall y \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |T_n(y) - T_n(0)| &= T_n(y) - T_n(0) = T_n(y) \\ &\leq |y| \leq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T_n([0,1]) \subset [0,1].$$

$$\Rightarrow \text{soit } y, y' \in [0,1] \quad y = \frac{1}{2} \quad y' \in [0,1]$$

$$|T_n(y')^n - T_n(y)^n| \leq |y' - y|^n \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow h_n \xrightarrow{s} h \text{ constante} \quad h = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n^n\left(\frac{1}{2}\right)$$

Montrer que la CV est uniforme. $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} |T_n(y) - h(y)| &\leq |T_n(y) - T_n^n\left(\frac{1}{2}\right)| + |T_n^n\left(\frac{1}{2}\right) - h(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ par } n > N & \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ CVU. de h_n vers une h continue $\forall y$

Ex 23

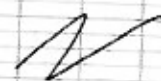
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad f_n(x) = (n+1) \cos^n x \sin(x)$$

$$f_n \xrightarrow{sr} 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \cos^n(x) \sin(x) dx \\ &= \left[-\cos^{n+1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \end{aligned} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\text{or } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0.$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas cvu.



Ex 24

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{x}{n} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{sr} 0.$$

$$f'_n(x) = \frac{n(1+x^n) - x n^2 x^{n-1}}{n^2 (1+x^n)^2} = \frac{n + x^n (n - n^2)}{(1+x^n)^2}$$

$$= \frac{n}{(1+x^n)^2} \times (1 + (1-n)x^n)$$

$$f'_n(x) > 0 \quad \text{si} \quad 1 + (1-n)x^n > 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad (n-1)x^n < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^n < \frac{1}{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad x < \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$$

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}$$

$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{n-1}}}{n(1 + \frac{1}{n-1})}$$

$$f_n(x_n) = \frac{n-1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} = \frac{(n-1)^{1-\frac{1}{n}}}{n^2} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cvu}$$

Ex 25

$$x \in I =]-\pi, \pi[$$

$$f_n(x) = \frac{\sin^2(nx)}{n \sin x} \quad x \neq 0$$

$$f_n(0) = 0.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)}}_{\text{borné}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad x > 0$$

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{s} 0.$$

$$b). \quad a \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$J = [a, \pi - a]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| f_n'(x) \right| = \frac{2n \sin(nx) \cdot \cos(nx) n \sin(x) - \sin^2(nx) n \cos(x)}{n^2 \sin^2(x)}$$
$$= \frac{\sin^2(nx)}{n^2 \sin^2(x)} [2n \cos(nx) \sin(x) - \sin(nx) \cos(x)]$$

$$\frac{\sin^2 nx}{n \sin x} \leq \frac{\sin^2 nx}{n \sin(a)}$$

$$\leq \frac{1}{n \sin(a)} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{CUU.}$$

$$c) \quad f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n \sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{n \sin \frac{\pi}{2n}} \sim \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \neq 0$$

pas de CUU sur I



Ex 31

$$\zeta(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \quad \eta(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

a) ζ est définie sur $]1; +\infty[$
 η ————— $]0; +\infty[$ (CSSA)

b) $a > 1$
 ζ sur $[a; +\infty[$ $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^a} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^a}$ age
 $\Rightarrow$ continuité de ζ sur $]1; +\infty[$

$a > 0$
 ζ sur $[a; +\infty[$ $|R_n(n)| \leq \frac{1}{n^a} \rightarrow 0$
 $\Rightarrow$ CUV sur $[a; +\infty[\Rightarrow$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$

c) $\zeta(n) - \eta(n)$ $n > 1$
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^n}$ $1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ pair} \\ 0 & n \text{ impair} \end{cases}$
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n)^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{1-n}}{n^n} = 2^{1-n} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$
 $= 2^{1-n} \zeta(n)$

$$\Rightarrow \zeta(n) - \eta(n) = 2^{1-n} \zeta(n)$$

$$\Rightarrow \eta(n) = (1 - 2^{1-n}) \zeta(n)$$

Ex 32

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x)$$

$$u_n(0) = 0.$$

$$x \in]0, 1]$$

$$\begin{aligned} a) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1} \ln(x) \\ &= \ln(x) \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^{n+1} \\ &= \begin{cases} \ln(x) \times \frac{1}{1+x^2} & \text{pour } x < 1 \\ 0 & \text{pour } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$x \in]0, 1[$
 $x = 1.$

$$b) \quad |R_n(x)| \leq \ln(x) x^{2n+4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \text{CVU sur } [0, 1]$$

$$c) \quad \text{Par CVU sur } [0, 1]. \quad u_n \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \text{ par c.c.}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x) dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) dx.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) dx = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$$

$$\int_0^1 x^{2n+2} \ln(x) dx$$

$$\text{IPP: } u = \ln t \quad u' = \frac{1}{t}$$

$$v = \frac{t^{2n+3}}{2n+3}$$

$$v' = t^{2n+2}$$

$$u, v \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$$

$$= \left[\ln t + t \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2n+3} t^{2n+2} dt$$

cage par c.c.

$$= -\frac{1}{(2n+3)^2} \left[t^{2n+3} \right]_0^1 = -\frac{1}{(2n+3)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{(2n+3)^2}$$

! résultat
égal à
avec l'autre!

→ penser à
faire

Ex 33

(a_n) suite réelle positive et décroissante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(x) = a_n x^n (1-x) \quad x \in [0,1]$$

a) $u_n(0) = u_n(1) = 0 \quad n \geq 0$

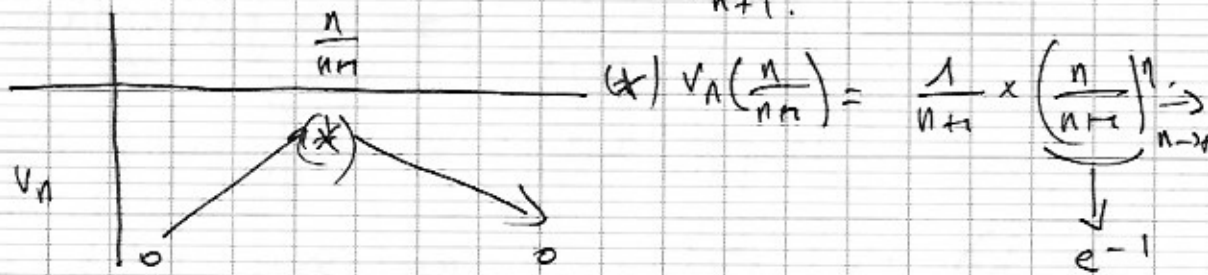
$\forall x \in]0,1[\quad a_n x^n (1-x) \leq a_0 x^n$

on $\sum a_0 x^n$ est une série géométrique q.c. $\Rightarrow$ CUS sur $[0,1]$.

b) $\|u_n\|_\infty = ?$

on $x^n(1-x) = v_n(x) \Delta x$: $v_n'(x) = n x^{n-1}(1-x) - x^n$
 $= x^{n-1} (n - (n+1)x)$

$\Rightarrow v_n'(x) > 0$ si $n - (n+1)x > 0$
 $x < \frac{n}{n+1}$



$\Rightarrow \|u_n\|_\infty = \frac{a_n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n+1})} \leq e^{-\frac{n}{n+1}} \leq 1$ car $\ln(1-t) \leq -t$.

$\Rightarrow \|u_n\|_\infty \leq \frac{a_n}{n+1} \leq \frac{a_n}{n}$ donc si $\sum \frac{a_n}{n}$ converge il y a CUS

$\Leftarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ est une suite bornée dans $[m,1] \subset \mathbb{R}_+^*$ car convergente.

$\Rightarrow \sum \|u_n\|_\infty$ converge $\Rightarrow \sum \frac{a_n}{n+1} \times m$ converge par comparaison

$\Rightarrow \sum \frac{a_n}{n+1}$ converge.

et $\frac{a}{n} \leq 2 \frac{a_n}{n+1} \Rightarrow \sum \frac{a_n}{n}$ converge

Exercice 34

$$\forall n \in \mathbb{N}_+, f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

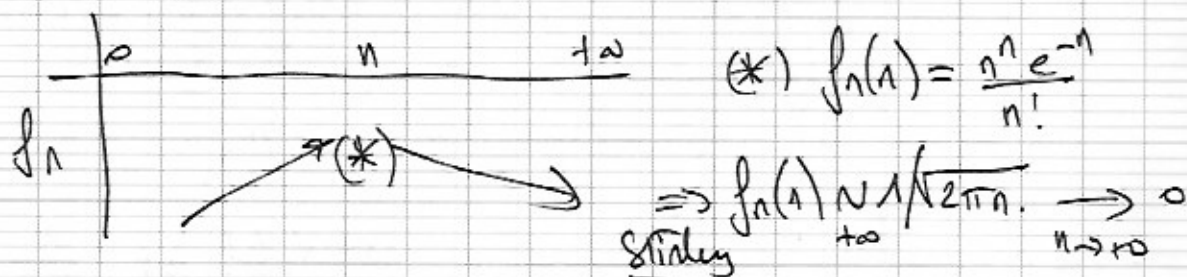
2) n fixé $x \in \mathbb{R}_+$ $\frac{x^n e^{-x}}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ par C.C.

$$\Rightarrow f_n \xrightarrow{s^r} 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

• C.V.U. ? $f_n \Delta^k$ sur $\mathbb{R}_+$

$$f'_n(x) = \frac{n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{n!} (n - x).$$

$$\Rightarrow f'_n(x) > 0 \text{ sur } x < n.$$



il y a donc C.V.U. de f_n sur $\mathbb{R}_+$

b) sur $[0, a]$ pour $n \gg 0$ $\|f_n\|_\infty = f_n(a)$

Par d'Abel : $\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_{n+1}\|_\infty} = \frac{a^n e^{-a}}{a^{n+1} e^{-a}} = \frac{1}{a}$

$$= \frac{1}{a} \rightarrow 0 \Rightarrow \sum \|f_n\|_\infty < +\infty \Rightarrow \sum f_n \text{ C.V.U.}$$

c) $\sum f_n(x) = \sum \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ or $\frac{x^n e^{-x}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$
 et $\sum \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ diverge $\Rightarrow$ il n'y a pas C.V.U.

d'après le Théorème d'intégration terme à terme.

Exercice 3

△ avec
d'usage

$$x > 0 \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$$

a) S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car
 $x > 0 \quad \frac{1}{n+n^2x} \leq \frac{1}{n^2x}$ et $\sum \frac{1}{n^2x}$ age.
 $x > 0 \quad \sum \frac{1}{n}$ diverge.

b) il y a CVN sur tout intervalle $[a; +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$
car $\frac{1}{n+n^2x} \leq \frac{1}{n^2a}$ et $\sum \frac{1}{n^2a}$ age
 $\Rightarrow$ pour $x \mapsto \frac{1}{n+n^2x}$ est $\mathcal{C}^\infty$, il en est de
même de S sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) $x \leq x' \Rightarrow \frac{1}{n+n^2x'} \leq \frac{1}{n+n^2x}$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+n^2x'} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+n^2x}$
 $\Rightarrow_{N \rightarrow +\infty} S(x') \leq S(x)$

Ainsi S est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 31

$x \geq 0$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

2)

$$x=0 : S(0)=0$$

$$0 < x < 1$$

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

$$\sim x^n$$

et $\sum x^n$ converge.

$$x=1$$

$$\sum \frac{1}{2} \text{ diverge}$$

$$x > 1$$

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim \frac{1}{x^n}$$

$$\sim \frac{1}{x^n}$$

et $\sum \frac{1}{x^n}$ converge.

$\Rightarrow$ S est définie sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned} \text{b). } S\left(\frac{1}{x}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{x^n(x^n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = S(x) \end{aligned}$$

$$\text{c)} \text{ sur } [0, 2] \subset [0, 1] \left[\frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n \text{ et } \sum x^n \text{ converge} \right.$$

$$\Rightarrow \text{on a sur } [0, 2] \subset [0, 1] \quad \forall a < 1$$

$$\Rightarrow \text{continue sur } [0, 1[$$

sur $]1, +\infty[$ $x \mapsto S(x) = S\left(\frac{1}{x}\right)$
et la composition de 2^e fois continue
 $\Rightarrow$ S est continue.

Ex 38

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$$

2) $x=0 \quad S(0)=0$

$0 < x < 1 \quad \text{et } \frac{x^n}{1+x^n} < x^n \quad \text{et } \sum x^n \text{ cge} \Rightarrow \text{cv.}$

$x=1 \quad \sum \frac{1}{2} \text{ diverge}$

$x > 1 \quad \frac{x^n}{1+x^n} \rightarrow 1 \text{ diverge.}$

$\Rightarrow$ cge sur $[0; 1[$ diverge sur $[1; +\infty[$

$x < 0 : n \geq (-1)^n$: pas défini.

$n' : -1 < x < 0$

$$\left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq \frac{|x^n|}{|1+|x|^n|} \leq \frac{|x|^n}{1-|x|^n} \leq \frac{|x|^n}{\frac{1}{2}} \leq 2|x|^n$$

pour $n \gg 0$

$\Rightarrow$ cva.

$n' : x < -1 \quad \frac{x^n}{1+x^n} = \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \sim 1 \rightarrow 1$

$\Rightarrow$ diverge.

$\Rightarrow S$ st défini sur $I =]-1, 1[$

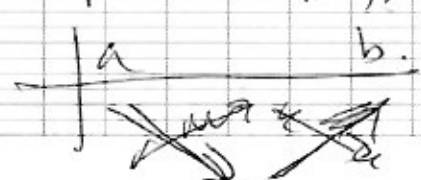
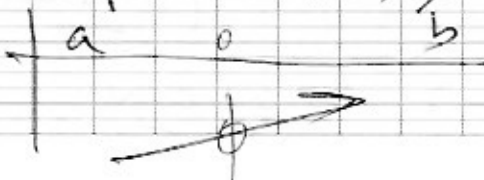
b) sur $[a, b] \subset]-1, 1[$

$$\sum \frac{x^n}{1+x^n} \quad u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} \quad \text{dallé}$$

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n+1}(1+x^n) - x^n \times nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{nx^{n+1}}{(1+x^n)^2}$$

n impair : $u_n'(x) \geq 0$

n pair : $u_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{suppos} \\ n \text{ pair} \end{array} \right. \quad \frac{a^n}{1+a^n} \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq \frac{b^n}{1+b^n} \quad n \text{ pair}$$

→ On se place sur $[-a, a] \subset]-1, 1[\quad a > 0$

n impair

$$\frac{-a^n}{1-a^n} \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq \frac{a^n}{1+a^n}$$

$$\Rightarrow \forall x \in [-a, a] \quad \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| \leq 2a^n.$$

$n \gg 0$

n pair:

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq \frac{a^n}{1+a^n}.$$

Donc on a ce:

$$\frac{x^n}{1+x^n} \leq 2a^n.$$

et $\sum 2a^n$ age $\Rightarrow$ CVM sur $[-a, a]$

$\Rightarrow$ continue sur $] -1, 1[$

Dérivabilité:

$$u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$u'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

$$\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \sim nx^{n-1}$$

$$\left| \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \right| \sim n|x|^{n-1} \text{ et } \sum n|x|^{n-1} \text{ age}$$

(d'Abel)

sur $[-a, a] \Rightarrow$ on a CVM.

$\Rightarrow$ env de $\sum u_n'$ sur l'interval $[a, c]$ et
 env de $\sum u_n$

$\Rightarrow \sum u_n$ est dérivable et

$$(\sum u_n)' = \sum u_n' = \sum \frac{nx^{n^2-1}}{(1+x^{n^2})^2}.$$

Exercice 3)

$$S: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

2).

$$x \neq 0 \quad \frac{x}{n(1+n^2x^2)} \sim \frac{x}{n^3x^2} \sim \frac{1}{n^3x}$$

$$x=0 \quad = 0.$$

et de type constant $\Rightarrow S(x)$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{on suppose } u_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)} \quad u_n'(x) = \frac{1(1+n^2x^2) - x \cdot 2nx}{n^2(1+n^2x^2)^2}$$

$$! \quad u_n' \text{ pour } u_n'(x) = \frac{1 + n^3x^3 - 2n^2x^3}{n^2(1+n^2x^2)^2}$$

$$= \frac{1 - n^3x^2}{n^2(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-(nx)^2)}{n^2(1+n^2x^2)^2}$$

$$u_n'(x) > 0 \quad n(1-2n^2x + n^2x^2) > 0$$

$$\Delta = 4n^4 - 4n^2 = 4n^2(n^2 - 1)$$

$$x_1, x_2 = \frac{2n^2 \pm 2n\sqrt{n^2-1}}{2n^2}$$

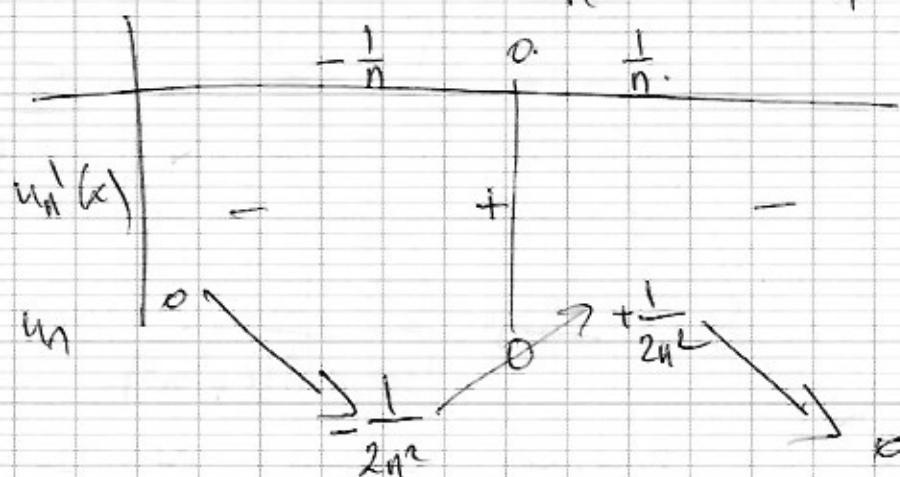
$$= 1 \pm \frac{\sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$= \frac{n \pm \sqrt{n^2-1}}{n}$$

$$\Rightarrow u'_n(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - n^2 x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$$



$$u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{n(1+1)} = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et on suppose.}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{2n^2} \Rightarrow \sum_n \text{converge}$$

d'où la convergence de S sur $\mathbb{R}$.

b) u_n dérivable et $u'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{n(1 + n^2 x^2)^2}$

sur $[-a, a] \subset \mathbb{R}$.

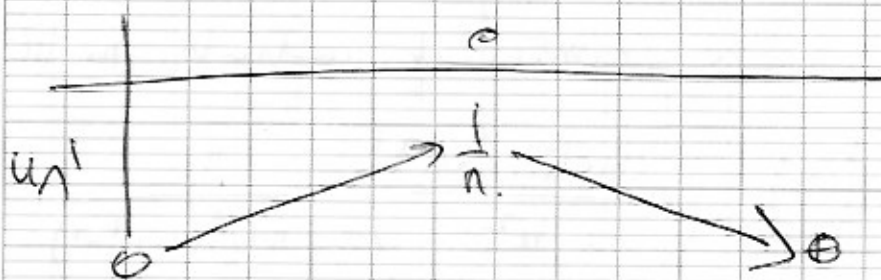
$$u'_n(x) \leq ?$$

$$u''_n(x) = \frac{-2n^2 x \times n(1 + n^2 x^2)^2 - (1 - n^2 x^2) n 2(1 + n^2 x^2) \times 2n^2 x}{n^2 (1 + n^2 x^2)^4}$$

$$= \frac{2n^3 x (1+n^2 x^2) (-(1+n^2 x^2) - (1-n^2 x^2))}{n^4 (1+n^2 x^2)^8}$$

$$= \frac{-4 n^3 x (1+n^2 x^2)}{n^4 (1+n^2 x^2)^8}$$

$$\Rightarrow u_n''(x) > 0 \text{ m' } x \neq 0$$



$$u_n'(0) = \frac{1}{n(1+n^2(0)^2)^2} = \frac{1}{n}$$

il n'y a pas de max sur $\mathbb{R}$

sur $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$$\forall x > 0 \quad \left| \frac{1-n^2 x^2}{n(1+n^2 x^2)^2} \right| \leq \frac{1-n^2 a^2}{n(1+n^2 a^2)^2} \leq \left| \frac{1-n^2 b^2}{n(1+n^2 a^2)^2} \right| \approx \frac{n^2}{n^5} \times \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{et } \sum \frac{b^2}{a^2} \times \frac{1}{n^3} < \infty$$

$$\Rightarrow \text{converge}$$

$\Rightarrow$ Theoreme de deconvolution $\Rightarrow \sum u_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

et par symetrie aussi sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 40.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nx)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arctan}(nx) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nx) \right| \leq \frac{\pi}{2n^2}$$

$$\text{et } \sum \frac{\pi}{2n^2} \text{ cge} \Rightarrow \underline{\text{CVM}}.$$

$\Rightarrow$ existe et continue sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2} \right)' = \frac{n}{n^2(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$$

$$n: n \neq 0. \quad \text{pour} \quad \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \sim \frac{1}{n^3x^2}$$

$\Rightarrow$ ~~CVM~~ sur $\mathbb{R}^*$ de $\sum u_n'$.

et la convergence est uniforme sur tout segment

$$[a, b] \subset \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2b^2)} \sim \frac{1}{n^3b^2}$$

$$\text{et } \sum \frac{1}{n^3b^2} \text{ converge}$$

~~CVM sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\sum u_n$ converge $\Rightarrow$ (CVM sur $\mathbb{R}_+^*$)~~

CVM sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ de $\sum u_n'$

$$\Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [a, b]$$

$$\Rightarrow f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$\Rightarrow$ impédant $\mathbb{R}^+$.

Exercice 41

$$u(n) = \text{Arctan}(\sqrt{n+1}) - \text{Arctan}(\sqrt{n}) \quad n \geq 0.$$

$$S(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} u(k)$$

$$u'_n(n) = \frac{1}{1+n+n} \times \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

$$|u(n)| \leq |n| \times \frac{1}{2\sqrt{n}(1+n)}.$$

$\Rightarrow$ C.V.S.

+ C.V.N sur tout segment $[0, a]$

$\Rightarrow S(n)$ existe et est continue sur $\mathbb{R}^+$



Exercice 42

$$f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 a}$$

a) f est définie pour tout $a > 0$.

b) $f(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(n)$

$$u(n) = e^{-n^2 a}$$

$$u_1'(n) = -n^2 e^{-n^2 a}$$

$$u_1''(n) = n^4 e^{-n^2 a}$$

$$\vdots$$
$$u_1^{(k)}(n) = (-n^2)^k e^{-n^2 a}$$

$$\sum u_1^{(k)}(n) = \sum (-n^2)^k e^{-n^2 a}$$

$$\text{sur } [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$$

$$|(-n^2)^k e^{-n^2 a}| \leq n^{2k} e^{-a n^2}$$

$$\text{Or } a > 0 \Rightarrow n^{2k} e^{-a n^2} = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

$$\text{donc } \sum n^{2k} e^{-a n^2} \text{ est}$$

$\Rightarrow$ il y a CVM sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\text{et } \boxed{f^{(k)}(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-n^2)^k e^{-n^2 a}}$$

c)

$$n \leq n' \Rightarrow -n^2 a \geq -n'^2 a$$

$$\Rightarrow e^{-n^2 a} \geq e^{-n'^2 a}$$

$$\Rightarrow f(n) \geq f(n')$$

$\Rightarrow f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 45

$$t > 0 \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$$

2) t fixé $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{t+n}$ converge d'après le CSSA

$$\text{et } |R_n(t)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{t+n+1} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ CVU sur $\mathbb{J}_{0,+\infty}[$ $\Rightarrow$ continuité de S sur $\mathbb{R}_+^*$

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(t+n)^2} \quad \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(t+n)^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ cge}$

$\Rightarrow$ CVU de $\sum u_n'(t)$

$\Rightarrow S(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(t+n)^2}$

Exercice 46

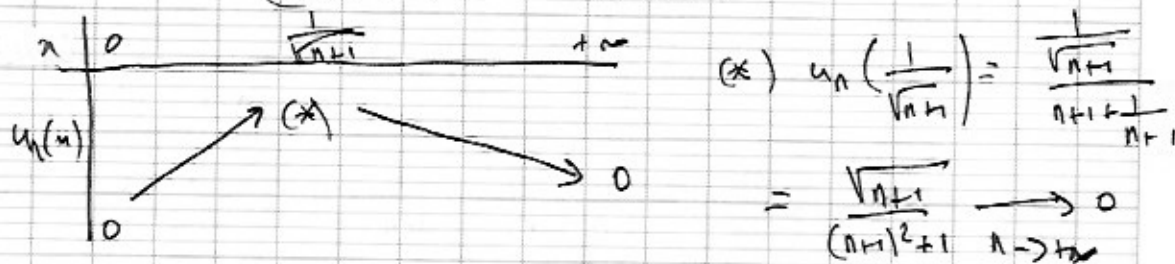
$$x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}$$

2) $x > 0$ fixé $S(x)$ converge d'après le CSSA
 $x = 0$ fixé $S(0) = 0$
 $x < 0$ fixé $S(x) = -S(-x)$

$\Rightarrow S$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.

b) Sur $\mathbb{R}_+^*$: CSSA $\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{x}{n+1+n^2} = u_n(x)$

$$u_n'(x) = \frac{n+1+x^2 - 2x^2}{(n+1+n^2)^2} = \frac{n+1-x^2}{(n+1+n^2)^2}$$



$\Rightarrow \|R_n(x)\|_\infty = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^2} \rightarrow 0 \Rightarrow$ CVU sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow$ continuité sur $\mathbb{R}_+^*$
 $\Rightarrow$ $\underline{\hspace{2cm}}$ sur $\mathbb{R}$

Ex 48

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \forall n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$u_n(n) = \frac{n^\alpha n e^{-nn}}{n^2 + 1}$$

$$I \text{ donc: se def: de } S(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(n)$$

$$2) \text{ pour } n > 0 \quad \frac{n^\alpha n e^{-nn}}{n^2 + 1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \text{cvg}$$

pour $n=0$ converge.

pour $n < 0$ diverge ($u_n(n) \not\rightarrow 0$ par CC, $\forall \alpha$)

$$\Rightarrow I = \mathbb{R}_+$$

$$b) \text{ sur } [a; +\infty[\quad \frac{n^\alpha n e^{-nn}}{n^2 + 1}$$

$$f_n(u) = n e^{-nn}$$

$$f'_n(u) = e^{-nn} - nn e^{-nn} = e^{-nn} (1 - nn)$$



$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} e^{-1} = \frac{1}{ne}$$

$$\text{sur } [a; +\infty[\text{ pour } n > 0 \quad \frac{1}{ne} \leq a \Rightarrow \max |u_n(u)| = \frac{n^\alpha a e^{-na}}{n^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \text{cvg sur } [a; +\infty[\quad \forall a > 0$$

$$\Rightarrow \varphi^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$c) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n(n)| = \frac{n^\alpha}{ne(n^2 + 1)} \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}} \times e$$

$$\Rightarrow \text{cvg sur } \mathbb{R}_+ \quad \begin{matrix} \text{si } 3-\alpha > 1 \\ \text{si } \alpha < 2 \end{matrix}$$

Exercices

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n}{x}\right)$$

n f.m. : $n \sin\left(\frac{n}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{x}$

$\Rightarrow$ CVA sur $\mathbb{R}$.
f st définie sur $\mathbb{R}$.

• f st 2π périodique.

pour $n \geq 4$ et $n \in [0, 10]$ h.m.
 $\Rightarrow$ CSSA $m\left(\frac{n}{x}\right)$ st décroissante
n $\in [0, 10]$: $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} m\left(\frac{n}{x}\right)$ converge d'après le CSSA

et $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ d'où la CUV sur $[0, 10]$
 $\Rightarrow$ CUV sur $\mathbb{R}$ par 2π -périodicité.

$\Rightarrow$ continuité de f.

$\Rightarrow$ Derivabilité de f :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n} \times \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n}{x}\right)}_{u'_n(x)} \Rightarrow \text{CUV car } |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ c.p.}$$

$\Rightarrow$ Derivabilité de f sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n}{x}\right)$$

Ex 42*

$$x \in \mathbb{R}, x \neq -1 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}$$

$$2) \quad u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} x \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}}$$

$$x \neq -1$$

$$|u_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n(1+x^n)} \right| \quad \text{si } x=0: \text{converge}$$

$$\begin{aligned} x \neq 0 \quad \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x^{n+1})} \times \frac{n(1+x^n)}{x^n} \\ &= x \times \frac{n}{n+1} \times \frac{(1+x^n)}{(1+x^{n+1})} \end{aligned}$$

$$\text{si } -1 < x < 1 \quad x \neq 0$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \Rightarrow |x| \Rightarrow \text{cge d'apr d'Abel}$$

$$\bullet \text{ si } x=1: u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \text{cge d'apr CSSA}$$

$$\bullet \text{ si } x > 1 \text{ ou } x < -1$$

$$\frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} - \frac{1}{n} \frac{(-1)^{n-1}}{x^n} + o\left(\frac{1}{n x^n}\right)$$

$$\text{car } \sum \frac{1}{n x^n} \text{ cge (x>1)}$$

$$\text{d'Abel: } \frac{1}{(n+1)|x|^{n+1}} \times |u_n| = \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{|x|} \rightarrow \frac{1}{|x|} < 1$$

D'oi la convergence de $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{aligned} b) \quad x \neq 0 \quad \sum_{n=1}^N u_n(x) + u_n\left(\frac{1}{x}\right) &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^{n+1}}{x^{n+1}+1} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{qui cge (CSSA)} \end{aligned}$$

$$N \rightarrow +\infty$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

c) Continue sur $] -1, 1[$.

$$V_n(u) = \frac{u^n}{1+u^n}$$

$$V_n'(u) = \frac{n u^{n-1} (1+u^n) - u^n n u^{n-1}}{(1+u^n)^2}$$

$$= \frac{n u^{n-1}}{(1+u^n)^2} \begin{cases} \text{n impair: } \geq 0 \\ \text{n pair: } \leq 0 \end{cases} \text{ et } |V_n'| \leq \frac{n}{4}$$

soit $0 < a < 1$ sur $[-a, a]$

n pair ou impair: $|u_n(u)| \leq \frac{a^n}{n(1+a^n)} \sim \frac{a^n}{n}$ et $\sum \frac{a^n}{n}$ age

$$\Rightarrow \text{CVN sur } [-a, a] \Rightarrow \text{Continue sur }] -1, 1[$$

$$\Rightarrow \text{de } f(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{\text{avec } \ln(2)} - f\left(\frac{1}{u}\right) \text{ on en déduit la continuité sur }]1, +\infty[\text{ et sur }]-\infty, -1[$$

Continue en 1?

soit $a > 0$: sur $[a, 1)$ $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow |u| \Rightarrow (u_n) \searrow$ à partir de certain rang n_0 on a $n_0 \leq n < 1$

De tels u on le serie age $\forall u \in [a, 1]$ d'après la CSSL

$$\Rightarrow \text{si } n < 1 \quad |R_n(u)| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{u^{n+1}}{1+u^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{n+1} \times |u^{n+1}| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\text{si } n > 1 \quad |R_n(u)| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et } u=1.$$

$$\text{Ainsi } \|R_n(u)\|_{\infty} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \text{CVU sur } [a, 1) \Rightarrow \text{continue à gauche en 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 1^-} f\left(\frac{1}{u}\right) = f(1)$$

$$\text{on } f\left(\frac{1}{u}\right) = \ln 2 - f(u) \xrightarrow{u \rightarrow 1^-} \ln 2 - f(1) = f(1).$$

$\Rightarrow$ d'où la continuité en 1.