Exercice 1. Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent uniformément vers f et g sur I ; soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}\forall x \in I, \quad |(\lambda.f_n + \mu.g_n)(x) - (\lambda.f + \mu.g)(x)| &\leqslant |\lambda|.\,|f_n(x) - f(x)| + |\mu|.\,|f(x) - g(x)| \\ &\leqslant |\lambda|.\|f_n - f\|_\infty + |\mu|.\|g_n - g\|_\infty \\ \Longrightarrow \|(\lambda.f_n + \mu.g_n) - (\lambda.f + \mu.g)\|_\infty &\leqslant |\lambda|.\|f_n - f\|_\infty + |\mu|.\|g_n - g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

donc $(\lambda.f_n + \mu.g_n)$ converge uniformément vers $(\lambda.f + \mu.g)$.

Exercice 2. Remarquons d'abord que si (f_n) converge uniformément vers f bornée, alors les (f_n) sont uniformément borné, c.a.d. il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\| \leqslant M$:

$$\forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leqslant \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\longrightarrow 0 \implies \text{ borné}} + \|f\|_\infty \leqslant M$$

Ainsi soit M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\forall x \in I,\ |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leqslant |f_n(x)| \times |g_n(x) - g(x)| + |f_n(x) - f(x)| \times |g(x)| \\ &\leqslant M \times \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \times \|g\|_\infty \\ \Longrightarrow \|f_n g_n - fg\|_\infty &\leqslant M \times \|g_n - g\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty \times \|g\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

d'où la CVU de $f_n g_n$ vers fg.

Exercice 3.

Exercice 4. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ;
Puisque $f_n \xrightarrow{u} f$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant N \implies \forall x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2$.
Puisque f est continue en x, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x_n \in [a,b]$, $|x - x_n| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon/2$.
Puisque $(x_n) \longrightarrow x$, pour cet $\alpha > 0$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_2 \implies |x - x_n| \leqslant \alpha \implies |f(x) - f(x_n)| \leqslant \varepsilon/2$.
Ainsi en posant $N = \max(N_1, N_2)$:

$$n \geqslant N \implies |f_n(x_n) - f(x)| \leqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ainsi par définition $f_n(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Exercice 5. Il est facile de voir que $u_n \xrightarrow{s} 0$; sur $]0,1[$ par croissance comparée, et en 0 et 1 car $u_n(0) = u_n(1) = 0$.
Pour étudier la CVU, on détermine $\|u_n - 0\|_\infty$ en étudiant les variations de u_n :

$$u_n'(x) = x^{n-1}(n\ln(x) + 1) \qquad u_n'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$$

t	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{e}}$		1
$u_n(t)$	0	↘	$-\frac{1}{n\sqrt{e}}$	↗	0

ainsi $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n\sqrt{e}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; d'où la CVU vers la fonction identiquement nulle.

Exercice 6. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$ pour $x \geqslant 0$. À $x \geqslant 0$ fixé, $f_n(x) \underset{n\to=\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$f_n'(x) = nxe^{-nx}(2 - nx) > 0 \iff x < \frac{2}{n}$$

t	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n(t)$	0	↗	$\frac{4}{ne^2}$	↘	0

ainsi $\|f_n - f\|_\infty = \frac{4}{ne^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$; d'où la CVU vers la fonction identiquement nulle.

Exercice 7. $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
il n'y a donc pas CV uniforme sur $\mathbb{R}$, puisque la limite de cette suite de fonctions continues n'est pas continue.
Par contre pour $a > 0$, sur $]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$:

$$\|f_n(x) - f(x)\| = \frac{1}{(1+a^2)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et il y a donc convergence uniforme sur $]-\infty;-a]\cup[a;+\infty[$.

Exercice 8. $u_n(x)=e^{-nx}\sin(nx)$ avec $x\geqslant 0$.

a) $u_n(0)=0$ et pour $x>0$, $u_n(x)=e^{-nx}\sin(nx)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}u(x)=0$. D'où la convergence sur $\mathbb{R}_+$ de u_n vers la fonction nulle u.

b) Sur $[a,+\infty[$, $|u_n(x)-u(x)|\leqslant e^{-na}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

c) Soit $x_n=\frac{1}{n}$; alors $f_n(x_n)=e^{-1}\sin(1)$ ne tend pas vers 0 ; il n'y a donc pas convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 9. $f_n(x)=\begin{cases}x^2\sin(1/nx) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

a) Soit $x\neq 0$, $x^2\sin(1/nx)\underset{0}{\sim}\frac{x}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.
Il y a convergence simple vers la fonction f identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

b) En considérant $x_n=n$, si il y avait CVU vers f alors $f_n(x_n)-f(x_n)$ devrait tendre vers 0 ; or : $f_n(x_n)-f(x_n)=n^2\sin\frac{1}{n^2}\underset{+\infty}{\sim}1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

c) Sur le segment $[-a,a]$, en appliquant $|\sin x|\leqslant|x|$ (qui se prouve soit par une étude des variations soit par concavité) :

$$\forall x\in[-a,a],\ |f_n(x)-0|\leqslant\left|\frac{x}{n}\right|\leqslant\frac{a}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Il y a donc convergence uniforme sur tout segment $[-a,a]$ pour $a>0$.

Exercice 10.
Exercice 11.
Exercice 12.
Exercice 13.
Exercice 14.
Exercice 15.
Exercice 16.
Exercice 17. Soit $f_n(x)=x(1+n^\alpha e^{-nx})$.

a) On a pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}x$ par croissance comparée pour $x>0$ et car $f_n(0)=0$ pour $x=0$.

b) On établit le tableau de variation de $x\longmapsto g_n(x)=f_n(x)-x$: on trouve :

$$g_n'(x)=n^\alpha e^{-nx}(1-nx)$$

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n(x)-x$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

et $g_n\left(\frac{1}{n}\right)=\|f_n-x\|_\infty=\frac{n^{\alpha-1}}{e}$ qui tend vers 0 ssi $\alpha>1$. Il y adonc convergence uniforme ssi $\alpha>1$.

c) Lorsque $\alpha=\frac{1}{2}<1$, la convergence étant uniforme sur le segment $[0,1]$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$$

Exercice 18.
Exercice 19.
Exercice 20.
Exercice 21.

a) Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$.

(I) Pour $n=0$: $u_1(x)=1+x$ ainsi $u_1(x)-u_0(x)=x$ est bien compris entre 0 et x. L'assertion est vérifiée au rang $n=0$.

(H) Supposons l'assertion vraie au rang $n\in\mathbb{N}$ fixé :

$$0\leqslant u_{n+1}(x)-u_n(x)\leqslant\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\qquad(HR)$$

Mais pour tout $t\in[0,1]$, $t-t^2=t(1-t)\in[0,1]$; ainsi pour tout $t\in[0,1]$, par HR :

$$0\leqslant u_{n+1}(t-t^2)-u_(t-t^2)\leqslant\frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et par croissance de l'intégrale :

$$0\leqslant\int_0^x u_{n+1}(t-t^2)\mathrm{d}t-\int_0^x u_(t-t^2)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\Longrightarrow 0\leqslant u_{n+2}(x)-u_{n+1}(x)\leqslant\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

b) La série $\sum_{n\geqslant 0}u_{n+1}(x)-u_n(x)$ converge par comparaison de séries positives puisque $\sum\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge. Par lien suite-série, la suite $(u_n(x))_n$ converge pour tout $x\in[0,1]$ vers une fonction u.

c) La convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_{n+1}(x) - u_n(x)$ est même normale puisque pour tout $x \in [0,1]$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{et} \sum \frac{1}{(n+1)!} \text{ converge}$$

Ainsi sa convergence est uniforme ; donc la suite $(u_{n+1} - u_0)$ converge uniformément et donc (u_n) converge uniforme vers sa limite u.

Remarquons que puisque $\forall t \in [0,1]$, $t - t^2 \in [0,1]$, la suite de fonctions $u_n(t-t^2)$ converge aussi uniformément sur $[0,1]$ vers $u(t-t^2)$; en effet :

$$\begin{aligned} &\forall x \in [0,1], \sup_{x\in[0,1]} |u_n(x) - u(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \Longrightarrow\ &\forall t \in [0,1], \sup_{t\in[0,1]} |u_n(t-t^2) - u(t-t^2)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n(x) &= \lim_{n\to+\infty} 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\mathrm{d}t \\ &= 1 + \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} u_n(t-t^2)\mathrm{d}t \qquad \text{par CVU sur } [0,1] \\ u(x) &= 1 + \int_0^x u(t-t^2)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ot puisque u_0 est continue, une récurrence immédiate (appliquant le théorème fondamental de l'analyse) montrer que tous les (u_n) sont dérivables et donc continues. Donc (toujours d'après le TFA) le membre de droite est dérivable de dérivée $x \mapsto u(x-x^2)$. Ainsi la limite u vérifie $u' = u(x-x^2)$.

Exercice 22.
Exercice 23.
Exercice 24.
Exercice 25.
Exercice 26. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

et que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il y a convergence normale, et donc aussi uniforme et simple de la série de fonction $\sum f_n$.

Exercice 27. Puisque :

$$\|f_n(x)\|_{+\infty} = \frac{1}{n}$$

il n'y a pas convergence normale de $\sum f_n$.

Montrons la convergence uniforme ; soit $x \in \mathbb{R}$ la série est alternée et vérifie le CSSA. Ainsi d'après le TSSA :

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $\|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc il y a convergence uniforme (et donc aussi simple) de la série.