

Fiche d'Exercice n°6

Réduction des endomorphismes

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$

$$P \mapsto (X^3 + X)P' - (3X^2 - 1)P$$

- a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- b) Montrer que, si P est un vecteur propre de f , alors $\deg(P) = 3$.
- c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 2. Soit E l'espace des suites réelles convergent vers 0 et $\Delta : E \rightarrow E$ l'endomorphisme défini par

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \Delta(u)(n) = u(n+1) - u(n)$$

Déterminer les valeurs propres de Δ .

Exercice 3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$, s'annulant en 0. Pour tout $f \in E$, on définit $\varphi(f) : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(f)(0) = 0 \text{ et } \forall x > 0, \varphi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- b) Déterminer les éléments propres de φ .

Exercice 4. Les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles diagonalisables ? Trigonalisables ? Diagonaliser celles qui sont diagonalisables

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (d) \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ -5 & -5 & -7 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $n \geq 3$ et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 6. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que J est diagonalisable.

Exercice 7. Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont égaux est diagonalisable si et seulement si c'est la matrice d'une homothétie.

Exercice 8. Pour quelles valeurs de (i, j) les matrices élémentaires $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont-elles diagonalisables?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; les matrices suivantes sont-elles diagonalisables?

$$A = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

- Calculer le rang de A . En déduire que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
- Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2 - 7a & a - 7 & a \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A est diagonalisable
- On suppose $a = 2$. Déterminer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & O_n \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 13. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A est diagonalisable.

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Montrer que A est trigonalisable, mais pas diagonalisable.
- Trigonaliser A . (On complétera une famille formée de vecteurs propres de chacun des sous-espaces propres en une base de \mathbb{R}^3 et on vérifiera que la matrice est bien triangulaire dans cette base)

Exercice 15. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

- A est-elle trigonalisable ? diagonalisable ?
- Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 .

- Etablir que $\chi_A(X) = X^{n-1}(X - \text{tr}(A))$.
- Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A + I_n$ soit diagonalisable.

Exercice 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace non nulle.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \text{tr}(A)M - \text{tr}(M)A.$$

- Montrer que $\text{tr}(A)$ est une valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé à cette valeur propre.
- Montrer que A est un vecteur propre de φ .
- Montrer que φ est diagonalisable.

Exercice 18. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

- Soit λ une valeur propre de A , montrez que $P(\lambda) = 0$
- Soit $A \in \text{GL}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, A est diagonalisable et $\text{tr}(A) = 8$. Déterminer le polynôme caractéristique de A .

Exercice 19.

a) Soit E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$, $n \in \mathbb{N}$. Soit λ une valeur propre de f . Montrer que λ^n est une valeur propre de f^n .

b) Montrer que toute matrice diagonalisable et nilpotente est nulle.

Exercice 20. Soit E un espace vectoriel, $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \neq 0$ tels que λ est une valeur propre de $u \circ v$. Montrer que λ est une valeur propre de $v \circ u$.

Exercice 21. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -2 \\ 1 & n+3 \end{pmatrix}$

a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n$.

Exercice 22. Déterminer les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases} .$$

Exercice 23. Déterminer la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 5, u_1 = 5, u_2 = 17$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 24. L'endomorphisme suivant $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il diagonalisable ?

$$\varphi : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Exercice 25. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels α et β pour que

$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 26. On admet que si D est diagonale à coefficients diagonaux distincts, et si M vérifie $M^2 = D$, alors M est diagonale.

Résoudre $M^2 = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 3 & 3 \\ -5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 27. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui transforme une suite u en v où $v_0 = u_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

Exercice 28. Soit $(u_n), (v_n), (w_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases} .$$

A quelle condition sur u_0, v_0, w_0 les trois suites sont-elles convergentes ?