

Fiche d'Exercice n°5

Révisions et compléments d'Algèbre linéaire

I. Révisions PCSI

I.1 Matrices

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. On pose $B = A + I_3$.

- a) Calculer B puis B^3 .
- b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

I.2 Espaces vectoriels

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F l'ensemble des fonctions dérivables sur \mathbb{R} et solutions de l'équation différentielle $y' - xy = 0$ et $G = \left\{ f \in E \mid \int_0^1 f(t)dt = 0 \right\}$.

- a) Déterminer une base de F et montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- b) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E .
- c) Montrer que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 4. Soit $f_k : x \mapsto e^{kx}$, définie sur \mathbb{R} . Montrer que (f_0, \dots, f_n) est une famille libre de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

I.3 Applications linéaires

Exercice 5. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et φ l'application définie par $\forall P \in E, \varphi(P) = 2P - (X-1)P'$.

- a) Montrer que φ est un endomorphisme de E .
- b) Déterminer une base de $\text{Ker } \varphi$.
- c) Déterminer $\text{rg}(\varphi)$
- d) Déterminer $\text{Im } \varphi$.
- e) Montrer que $\text{Ker } \varphi \oplus \text{Im } \varphi = E$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) \mapsto (3x + 4y - 4z, -2x - y + 2z, -2x + z)$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et \mathcal{B}' la famille $\mathcal{B}' = (e_1 + e_3, e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3)$.

- a) Déterminer $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
- b) Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
- c) Déterminer les matrices de passage $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$.
- d) Déterminer $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
- e) Déterminer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . Soit f l'endomorphisme

canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

- a) Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- b) Calculer A^2, A^3, A^4 .
- c) Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est une base de \mathbb{R}^4 .
- d) Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$

Exercice 8. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $u^{p-1} \neq 0$ et $u^p = 0$.

- a) Justifier l'existence d'un vecteur $a \in E$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$
- b) Montrer que la famille $(a, u(a), \dots, u^{p-1}(a))$ est libre.
- c) En déduire que $u^n = 0$.

Exercice 9. Soit E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose $w = v \circ u$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- a) w est un isomorphisme de E dans G .
- b) u est injective, v est surjective et $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

Exercice 10. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq O_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 = O_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq O_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^3 + f = O_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ et que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.4 Homothéties, projecteurs et symétries

Exercice 12. Soit f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid f(x) = \lambda x$. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 13. Soit $u = (1, -1, 1)$. Soit $f : (x, y, z) \mapsto (x, y, z) - (x + y + z)u$. Montrer que f est un projecteur de \mathbb{R}^3 et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}^3$, \mathcal{B} la base canonique de E , $u_1 = (1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$. $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \text{Vect}(u_3)$.

- Montrer que F et G sont supplémentaires dans E
- Ecrire la matrice dans \mathcal{B} de la projection p sur F parallèlement à G .
- En déduire la matrice de la symétrie s par rapport à F parallèlement à G dans \mathcal{B} .

Exercice 15. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel, p, q deux projecteurs de E .

- Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$
- Dans ce cas, montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im} p + \text{Im} q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker} p \cap \text{Ker} q$.

Exercice 16. Soit E, F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \text{id}_F$.

- Montrer que $\text{Ker} u \oplus \text{Im} v = E$.
- Montrer que $v \circ u$ est la projection sur $\text{Im} v$ parallèlement à $\text{Ker} u$.

Exercice 17. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\text{rg}(f) + \text{rg}(\text{id}_E - f) = n$.

I.5 Déterminants

Exercice 18. Calculer les déterminants suivants sous forme factorisée. (a, b, c sont des réels)

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$$

Exercice 19. Soit A une matrice antisymétrique réelle de taille $2n + 1$. Déterminer $\det(A)$. Donner un exemple de matrice antisymétrique de taille paire ne vérifiant pas le même résultat.

$$\text{Exercice 20. Déterminer } \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

Exercice 21. Soit $A = (\max(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Déterminer $\det(A)$

II. Somme et produit de sous-espaces vectoriels

Exercice 22. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + 2f$. Soit $E_1 = \text{Ker } f, E_2 = \text{Ker } (f + \text{id}_E), E_3 = \text{Ker } (f - 2\text{id}_E)$. Prouver que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

Exercice 23. On pose $F_0 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}, F_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(2) = 0\}$ et $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F_0 \oplus F_1 \oplus F_2$.

Exercice 24. Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Soit $F_1 = \{f \in E \mid \forall t \in [0, 1], f(t) = 0\}, F_2 = \{f \in E \mid \forall t \in [-1, 0], f(t) = 0\}$ et $F_3 = \{f \in E \mid f \text{ est constante } \}$.

- Montrer que E_1, E_2, E_3 sont des sous-espaces vectoriels de E
- Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

III. Matrices par blocs et sous-espaces stables

Exercice 25. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n , pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 26. Soit $f \in \mathcal{L}(E), p$ projecteur. Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f (Pour la réciproque, on pourra justifier puis utiliser le fait que tout vecteur x peut se mettre sous la forme $x = u + v$, avec $u \in \text{Ker } p$ et $v \in \text{Im } p$)

Exercice 27. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$.

- Montrer que $\text{Im } u$ est stable par u .
- Pour $x \in \text{Im } u$, calculer $u^2(x)$ (c) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$. Montrer que v est un automorphisme.

Exercice 28. Soit E de dimension finie $2p, p \geq 1, \phi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre

- $\phi^2 = 0$ et $\text{rg}(\phi) = p$
- $\text{Im } \phi = \text{Ker } \phi$
- Il existe $A \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que, par blocs, $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit matrice de ϕ .

Exercice 29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$

- Montrer que A est inversible si et seulement si B l'est.
- Calculer les puissances de B .

Exercice 30. Soit $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$, avec B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A quelles conditions A est-elle inversible? Calculer son inverse lorsque celui-ci existe.

IV. Matrices semblables et trace

Exercice 31. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = A$. Calculer $\text{tr}(A)$ puis $\text{tr}(A^p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

Exercice 32. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 33. Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

a) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & -2 \\ -1 & -6 & 5 & -2 \\ -1 & -10 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 21 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et A^T .

Exercice 34.

a) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$ sont semblables dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Exercice 35. Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB - BA = I_n$?

Exercice 36. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace non nulle. Soit $h : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$X \mapsto \text{tr}(A)X - \text{tr}(X)A$$

a) Montrer que $h \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

b) Déterminer $\text{Ker } h$.

c) Montrer que $\text{Im } h = \text{Ker } \text{tr}$.

d) Calculer h^k , pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 37. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 .

a) Montrer que $f^2 = \text{tr}(f)f$.

b) A quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

V. Déterminants

Exercice 38. Calculer :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}. \quad \text{En déduire} \quad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 39. Calculer :

a) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}$ b) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a^{-1} & a & a^3 \\ b^{-1} & b & b^3 \\ c^{-1} & c & c^3 \end{vmatrix}$ c) $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$

Exercice 40. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Montrer que
$$\begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{pmatrix}.$$

b) En déduire que si A et B commutent,
$$\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A^2 + B^2).$$