ENCPB - 2024/25 PC - Maths

Fiche d'Exercice n°4

Séries numériques

Exercice 1. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ (b) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2(n)}$ (c) $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$

(d) $u_n = \dfrac{n!}{(-2)^n}$ (e) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2\ln^3(n)}$

(g) $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}$ (h) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ (i) $u_n = \dfrac{1}{n}\left(2-\sqrt[n]{3}\right)^n$

(j) $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (k) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ (l) $u_n = \dfrac{3\times 6\times 9\times\cdots\times(3n)}{n^n}$

(m) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ (n) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (o) $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(p) $u_n = \sin\left(\dfrac{n^3+1}{n^2+1}\pi\right)$ (q) $u_n = \dfrac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^2}$ (r) $u_n = \left(n^3+1\right)^{1/3} - \left(n^2+1\right)^{1/2}$

Exercice 2. Soit la suite de terme général $u_n = (n\sin(1/n))^{n^2}$.

(a) Déterminer $\ell = \lim u_n$.

(b) Déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Exercice 3. Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature des séries de termes généraux :

(a) $u_n = \dbinom{2n}{n}\alpha^n(\text{ avec } \alpha \geqslant 0)$ (b) $u_n = e^{-n^\alpha}$ (c) $u_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ (d) $u_n = \exp\left(-(\ln n)^\alpha\right)$

(e) $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

Exercice 4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel p la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n^{np}}{(np)!}$ est-elle convergente ?

Exercice 5. Montrer que les séries de termes généraux $u_n = \dfrac{\cos(n)}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{\sin(n)}{2^n}$ convergent et calculer leurs sommes.

Exercice 6. Montrer que la série de terme général $(1+2+\cdots+n)^{-a}$ converge si et seulement si $a > 1/2$.

Exercice 7. Établir la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes :

(a) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{5\times 3^n}{7\times 2^{2n-1}}$ (b) $\sum \sin\left(1/2^{n+1}\right)\cos\left(3/2^{n+1}\right)$. (c) $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^3-n}$

(On pourra trouver 3 réels a, b, c tels que $\frac{1}{n^3-n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n-1}$)

(d) $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$. (On pourra factoriser les polynômes)

Exercice 8. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geqslant 1}(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2))$$

selon les valeurs de a et b. Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 9. Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$ converge.

Exercice 10. On considère la suite u de terme général $u_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$ et la suite v de terme général $v_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n+2}\right)$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\tan u_n = \tan v_n$.

(b) En déduire que $u = v$.

(c) Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+3n+3}\right)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11. (Séries de Bertrand) On appelle ainsi les séries $\sum_{n\geqslant 2} u_n$, avec $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, où α et β sont deux réels. On se propose d'étudier leur convergence

(a) On suppose $\alpha > 1$. En étudiant $n^\gamma u_n$, pour un choix convenable de γ, montrer que la série converge.

(b) On suppose $\alpha < 1$. En considérant nu_n, montrer que la série diverge.

(c) On suppose $\alpha = 1$. Par comparaison à une intégrale, discuter de la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 12. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont aussi convergentes :

$$\sum \max(u_n, v_n), \qquad \sum \sqrt{u_n v_n}, \qquad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 13. Soit (u_n) une suite à termes positifs et (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$.

(a) Montrer que la série de terme général v_n converge. (On pourra déterminer sa somme partielle d'ordre n).

(b) On suppose que $\sum u_n$ diverge. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1$.

Exercice 14. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$ (b) $\displaystyle\sum_{p=3}^{n} \frac{\ln(p)}{p}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Exercice 15. En utilisant l'égalité $\displaystyle\frac{1}{n+1} = \int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t$, calculer les sommes suivantes :

(a) $\displaystyle A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (b) $\displaystyle B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Exercice 16. Soit (a_n) une suite définie par la donnée de $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et la relation de récurrence $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

(a) Etudier la nature de la série $\sum (-1)^n a_n$.

(b) Montrer que $\displaystyle\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \sim -\frac{a_n}{2}$. En déduire que la série $\sum a_n$ diverge.

Exercice 17. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Montrer la convergence et calculer la somme des séries de terme général :

(a) $\displaystyle u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2 (n-p)!}$ (b) $\displaystyle v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}$ (c) $\displaystyle w_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2 (n-p)^2}$

Exercice 18. Montrer que la série de terme général $(n+1)3^{-n}$ converge puis déterminer sa somme (On pourra montrer que cette série est un produit de Cauchy de deux séries de référence.)