

Fiche d'Exercice n°3

Intégration

I. Intégrales de fonctions continues sur un segment

Exercice 1. Soit $f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

- Justifier que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f (sans les limites).
- Soit $g : x \mapsto f(x) - \ln(x)$. Étudier les variations de g sur \mathbb{R}_+^* . En déduire le signe de g sur \mathbb{R}_+^* .
- En déduire les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{\text{sh } t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \int_x^{2x} \varphi(t) dt$.

- Montrer que f est bien définie et étudier la parité de f .
- Justifier que f est dérivable et calculer f' .
- Dresser le tableau de variations de f .
(On pourra montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq \text{sh}(x) \ln(2)$).

Exercice 3. En utilisant des sommes de Riemann sur $[0, 1]$, déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$(a) u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} \quad (b) u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2 + k^2} \quad (c) u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad (d) u_n = \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p}$$

Exercice 4. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \leq 1$, pour tout $x \in [a, b]$, et $\int_a^b f(t) dt = b - a$. Montrer que $f = 1$.

Exercice 5. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$.

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 6.

a) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Pour quel $x \in [0, \pi/2]$ a-t-on $\cos(x) = \sin(t)$?

b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable simple suggéré par la question précédente, que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$$

puis montrer que la valeur commune de ces deux intégrales est $\frac{\pi}{4}$

c) En déduire, à l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$ la valeur de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2+t}}$

Exercice 7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ pour que $\int_a^b |f(t)| dt = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$.

II. Fonctions continues par morceaux

Exercice 8. La fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{x + [1-x]}$ est-elle continue par morceaux ?

Exercice 9. Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Montrer que f est bornée. f admet-elle toujours un minimum et un maximum ?

III. Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 10. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes.

(a) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$	(b) $\int_0^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) dt$	(c) $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$
(d) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$	(e) $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$	(f) $\int_0^{+\infty} t + 2 - \sqrt{t^2 + 4t + 1} dt$
(g) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^3} dx$	(h) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$	(i) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{(1-t)^3}} dt$
(j) $\int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)e^{-x^2} dx$	(k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx$	(l) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt$
(m) $\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right) dx$	(n) $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$	(o) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+t^2} dt$
(p) $\int_0^{+\infty} \frac{t+i}{\sqrt{t}} e^{-t} dt$		

Exercice 11. Etudier la convergence, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de :

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt$	(b) $\int_0^{+\infty} t^\alpha \left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right) dt$
---	---

Exercice 12. Justifier la convergence des intégrales suivantes et les calculer.

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1} dt$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{\text{Arctan } t}{1+t^2} dt$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)}$. (on pourra utiliser le CDV $u = e^t$.)

e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(x)} dx$ (on pourra utiliser le CDV $t = \text{sh}(x)$)

f) $\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ (on pourra effectuer une IPP)

g) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx$ (on pourra utiliser le CDV $u = 1/x$)

h) $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ (on pourra utiliser le CDV $x = \sqrt{t}$).

i) $\int_0^1 t^n \ln(t) dt$, pour $n \in \mathbb{N}$. (on pourra effectuer une IPP)

j) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x+x^2} dx$ (on pourra utiliser le CDV $t = \frac{1}{x}$)

k) $\int_0^{\pi/2} \sin x \ln(\sin x) dx$ (on pourra utiliser le CDV $t = \cos x$).

l) $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$ (on pourra utiliser le CDV $u = \sqrt{1-t}$).

m) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} dx$ (on pourra utiliser le CDV $t = \sqrt{1+x}$).

n) $\int_{-\infty}^{+\infty} (1+i2t)e^{-t^2+it} dt$

o) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2t+2} dt$

p) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

q) $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt$

Exercice 13.

a) Justifier la convergence de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$.

b) Montrer que $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.

- c) En déduire une relation entre J et $J' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x) dx$.
- d) Montrer que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x) dx = J$.
- e) Déduire la valeur de J des questions précédentes (on pourra effectuer un changement de variable simple sur J')

Exercice 14. Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on pose $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

- a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, l'intégrale I_n est convergente.
- b) Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n .
- c) Calculer I_1 .
- d) Sachant que $I_0 = \sqrt{\pi}$, déterminer la valeur de I_n pour tout entier n .

Exercice 15.

- a) $f : t \mapsto e^{it^2}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?
- b) En remarquant que $f(u) = \frac{ue^{iu^2}}{u}$, et en utilisant une IPP, montrer que $\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge.
- c) Que peut-on dire de $\int_0^{+\infty} \cos(u^2) du$ et $\int_0^{+\infty} \sin(u^2) du$?

Exercice 16.

- a) Soit $\alpha > 0$, montrer, à l'aide d'une IPP, que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ est convergente.
- b) En déduire la nature de $\int_1^{+\infty} \sin(t^2) dt$ (en utilisant le CDV $t^2 = u$).
- c) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \sin(t)}{t + \cos(t)} dt$ est convergente. (On pourra trouver un développement asymptotique de $f(t)$ en $+\infty$ de la forme $f(t) = \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} - \frac{h(t)}{t\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right)$ où h est une fonction à déterminer)

Exercice 17.

- a) Soit u et v deux réels. Montrer que l'intégrale $\beta(u, v) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt$ est convergente si et seulement si u et v sont strictement positifs.
- b) Soit u et v deux réels strictement positifs. Démontrer successivement les inégalités suivantes :
- (i) $\beta(u+1, v) = \frac{u}{u+v} \beta(u, v)$
- (ii) $\beta(u, v) = \int_0^1 (1-t)^{u-1} t^{v-1} dt \quad \left(\text{CDV } x = \frac{1}{1+t} \right)$.

(iii) $\beta(u, v) = \beta(v, u)$

c) Soit a un réel strictement positif.

(i) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $\beta(n + 1, a)$.

(ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'intégrale $I_n(a) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{a-1} dt$ est convergente puis déterminer sa valeur.