ENCPB - 2024/25 PC - Maths

Fiche d'Exercice n°2

Révisions sur les fonctions réelles

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],[0,1])$ telle que $f \circ f = f$. On note A l'ensemble des points fixes de f. Montrer que $f([0,1]) = A$. En déduire que A est un segment.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall x > 0, \exists c > 0 \text{ tel que } f(x) - f(-x) = x\left(f'(c) + f'(-c)\right)$$

Exercice 3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 4$. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que : $f\left(c + \frac{1}{2}\right) - f(c) = 2$.

Exercice 4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \left|\dfrac{\cos x - 1}{x}\right| \leqslant 1$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. (On peut démontrer de même que $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.)

b) Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$.

Exercice 6. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Montrer que :

$$1 - \frac{a}{b} \leqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leqslant \frac{b}{a} - 1.$$

Exercice 7. Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 0 ?

(a)

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}\left(1 - x^4\right) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} f : [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}\left(1 - x^2\right) \end{array}$$

Exercice 8. Soit $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose que f'' ne s'annule pas sur $[a,b]$. Montrer que f ne s'annule pas sur $]a,b[$

Exercice 9. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$ est minorée et atteint son minimum.

Exercice 10. (Rolle généralisé et une application.)

a) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$f(a) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

b) Application. Soit :

$$\begin{array}{rccl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \exp\left(-x^2\right) \end{array}.$$

Montrer que la dérivée n-ième de f est de la forme $\mathrm{P}_n(x)\exp\left(-x^2\right)$ où P_n est un polynôme de degré n possédant n racines distinctes.

Exercice 11. (Très utile !)

a) Soit f une fonction réelle n fois dérivable sur un intervalle I et s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en un point de I.

b) Application. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer que l'équation $\mathrm{P}(x) - \sin x = 0$ ne possède qu'un nombre fini de racines réelles deux à deux distinctes sur un segment $[a, b]$.

Exercice 12. Soit le polynôme P_n défini par pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \left[\left(1 - x^2\right)^n\right]^{(n)}$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n dont les racines sont réelles, simples et appartiennent à $[-1, 1]$.

Exercice 13. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ définie sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ dans un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ puis que $\forall x \in]1, +\infty[, \dfrac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$.

Exercice 14. Calculer, à l'aide de développements limités, les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - \tan x}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 15. Déterminer à l'aide d'un développement limité l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

a) $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b) $f : x \mapsto \ln\left(2 + x + x^2\right)$.

Exercice 16. Déterminer à l'aide d'un développement asymptotique (l'existence et) l'équation d'une asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

a) $f : x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

b) $f : x \mapsto x^2 \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x}\right)$

Exercice 17. Soit $a > 0$ et $b > 0$. Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$