Fiche d'Exercice n°11
Convergence dominée - Intégrales à paramètre

Exercice 1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \ln(\cos(x^n)) dx$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x} e^{-x} dx$.

1. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
2. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et déterminer $\lim I_n$.
3. Déterminer $\lim nI_n$. En déduire un équivalent simple de I_n .

Exercice 3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \cos(t) dt$.

Exercice 4. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$.

On pourra au préalable montrer que pour tout $t > 0$: $\frac{1}{\text{sh}(t)} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}}$.

Exercice 5. Soit $x \in \mathbb{R}$; établir par deux méthodes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{(2n+1)^2 + x^2}$$

1. En appliquant le théorème d'intégration terme à terme. (On pourra appliquer après l'avoir établie l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$.)
2. En appliquant le théorème de convergence dominée. (On pourra appliquer après l'avoir établi que pour $t > 0$, $\frac{1}{\text{sh}(t)} = \frac{2e^{-t}}{1 - e^{-2t}}$.)

Exercice 6. Soient p et q deux réels > 0 . Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kq+p}$$

Exercice 7. Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction Γ .
2. Démontrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer que pour tout $x > 1$:

$$\Gamma(x) \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt.$$

Exercice 8. Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh}(t)}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction g .
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer g' .
3. Déterminer la limite de la suite $(g(n))_{n \geq 2}$.
4. En déduire g .

Exercice 9. Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de g .
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$; calculer g' , puis g .

Exercice 10. Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+t^2)}{1+t^2} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de g .
2. Montrer que g est continue sur $\mathcal{D}$.
3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de $\mathcal{D}$. Calculer g' .
4. (a) Calculer $g(0)$ à l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$.
(b) En déduire $g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.

Exercice 11. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 12. Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifier que f satisfait une équation différentielle linéaire du second ordre sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+$. Transformer $g(x)$ pour $x > 0$ à l'aide du changement de variable $t = u - x$. En déduire que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et satisfait la même équation différentielle que f .
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{(t+x)^2} dt$; en déduire sa continuité sur $\mathbb{R}_+$.
4. Déterminer les limites de f et g en $+\infty$; en déduire que $f = g$.
5. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.