

Fiche d'Exercice n°10

Variables aléatoires discrètes

1. On lance successivement n fois un dé équilibré et on note X le nombre d'apparitions du chiffre 6 . Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
2. Soit X, Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall j, k \in \mathbb{N}, P(X = j, Y = k) = \frac{e^{-2}}{j!k!}$. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. X une variable aléatoire entière telle que $\forall k \in \mathbb{N} P(X > k + 1) = \frac{1}{2}P(X > k)$. On pose $p = P(X = 0)$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X , en fonction de p .
4. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $p_n = P(X = n) = \frac{a}{3^n}$
Déterminer a pour que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définisse bien une loi de probabilité, puis $E(X)$ et $E\left(\frac{1}{X}\right)$.
5. Un joueur joue au jeu suivant. Il choisit un nombre entre 1 et 6 . On lance alors 3 dés. Si le nombre choisi par le joueur apparaît 3 fois (respectivement 2; 1), il gagne 3 euros (resp. 2; 1). S'il n'apparaît pas, le joueur perd 1 euro. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X représentant le gain du joueur.
6. On lance simultanément trois dés équilibrés à 6 faces. On note X la plus grande valeur obtenue.
 - (a) Déterminer $P(X \leq k)$, pour tout $k \in X(\Omega)$
 - (b) En déduire la loi de X , son espérance et sa variance.
7. Une puce est placée sur une grande ligne quadrillée. La puce avance successivement, d'une ou deux cases à chaque instant (les deux choix étant équiprobables). Elle se trouve sur la case 0 au départ. Soit X_n la case occupée après n sauts. On note Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts.
 - (a) Quelles sont la loi, l'espérance et la variance de Y_n ?
 - (b) Exprimer de façon simple X_n en fonction de Y_n . En déduire l'espérance et la variance de X_n
8. Un archer tire successivement sur n cibles. A chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.
9. Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes binomiales (m, p) et (n, p) suit une loi binomiale $(m + n, p)$.
Indication : $\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$

10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $p_n = P(X = n) = a \frac{2^n}{n!}$.
Déterminer a pour que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définisse bien une loi de probabilité, puis $E(X)$ et $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.
11. Une urne contient $n(\geq 3)$ boules indiscernables au toucher, deux sont blanches et les autres sont noires.
On tire une à une et sans remise les n boules de l'urne. X est la va égale au numéro du tirage de la première boule blanche tirée.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X .
12. $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 11])$. A l'aide de la formule de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un majorant de $P((X \leq 2) \cup (X \geq 10))$. Quelle est la vraie valeur de cette probabilité ?
13. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0.4)$. Déterminer un majorant de $P((X \leq 1) \cup (X \geq 7))$.
14. On lance une infinité de fois un dé à 4 faces équilibré. On note X le rang d'apparition du premier 1. Déterminer la loi et l'espérance de X . Pour $n \geq 1$, majorer $P(X \leq n)$.
15. On lance plusieurs fois un dé à 6 faces équilibré. Déterminer un nombre n de lancers à effectuer pour que la fréquence d'apparition du numéro 2 au cours de ces n lancers soit dans $]1/6 \pm \frac{1}{100}[$ avec un risque d'erreur inférieur à 0,05 .
16. Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On dispose d'une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile vaut p . On procède à l'expérience suivante : une infinité de lancers de la pièce. On note
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus lors des n premiers lancers de la pièce.
 - Y la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus avant l'apparition du second Pile.
- (a) Déterminer la loi de X_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$, puis son espérance et sa variance.
(b) Déterminer la loi de Y , puis son espérance.
17. Soit X une variable aléatoire discrète dont la fonction de répartition est donnée par
- $$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} . \text{ Déterminer la loi de } X$$
18. Une urne contient 2 boules noires et 2 boules blanches. Un joueur A effectue des tirages successifs sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Il laisse alors la place au joueur B qui effectue des tirages successifs d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées par A (respectivement B) avant de tirer une boule blanche.
Déterminer $X(\Omega), Y(\Omega)$, la loi conjointe de (X, Y) puis les lois marginales de X et de Y .
19. On dispose de deux urnes numérotées 1 et 2 . L'urne i contient $2i$ boules indiscernables et numérotées de 1 à $2i$, avec $i = 1$ ou 2 .
On lance une pièce équilibrée. Si l'on obtient le côté Pile, on choisit l'urne no 1 et on tire une boule. Sinon, on choisit l'urne n°2 et on tire une boule.

On note X la variable aléatoire égale à 1 si on obtient Pile et égale à 2 si on obtient Face. On note Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

Déterminer $X(\Omega), Y(\Omega)$, la loi conjointe de (X, Y) puis les lois marginales de X et de Y .

20. Deux urnes comportent chacune deux boules. Dans la première urne, les boules sont numérotées 0 et 1, et dans la deuxième -1 et 1.

On tire (indépendamment) une boule de chaque urne, on note X la variable aléatoire qui donne le numéro de la boule tirée de la première urne et Z la variable aléatoire qui donne le numéro de la boule tirée de la deuxième urne.

Soit $Y = ZX$. (a) Déterminer les lois de X, Z et Y .

(b) Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

21. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et le couple de variables aléatoires (X, Y) dont la loi de probabilité est définie, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, par :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \binom{j}{i} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-2\lambda} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

(a) Déterminer la loi marginale de X , puis $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Même question pour Y .

(c) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$, pour $j \in \mathbb{N}$.

(d) Calculer $\text{cov}(X, Y)$.

(e) Justifier, à l'aide de deux méthodes différentes, que X et Y ne sont pas indépendantes.

22. On lance n fois une pièce équilibrée et on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus lors des n lancers. On pose $F_n = \frac{X_n}{n}$.

(a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_n . En déduire l'espérance et la variance de F_n .

(b) Déterminer $n \in \mathbb{N}$ tel que la probabilité de l'événement $(F_n \in]0,48,0,52[)$ soit supérieure ou égale à $3/8$.

23. Un joueur lance un dé à 6 faces équilibré. Soit la variable aléatoire X (resp. Y) égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir une (resp. deux) fois le chiffre 5.

(a) Déterminer la loi de X .

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de Y sachant $(X = k)$.

(c) Déterminer les lois du couple (X, Y) et de Y .

(d) Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi de X sachant $(Y = n)$.

(e) Déterminer la loi de $Z = Y - X$. Que représente Z ?

(f) Montrer que X et Z sont indépendantes. Calculer $P(X = Z)$ et $P(X \leq Z)$.

(g) Déterminer la loi de $U = \min(X, Z)$.

(h) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de $C = \min(X, m)$.

24. Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X, Y) = (i, j)) = p^2 q^{i+j}$ avec $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.
- Déterminer les lois marginales de X et de Y .
 - X et Y sont-elles indépendantes ?
 - Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
 - Déterminer la fonction de répartition puis la loi de $U = \max(X, Y)$.
 - Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, P(X + Y = k) = (k + 1)p^2 q^k$.
 - Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de U sachant $(X + Y = 2n + 1)$.
25. Soit $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, p \in]0, 1[$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$. En utilisant les séries génératrices, déterminer la loi de $X + Y$.
26. Soit X une variable aléatoire entière dont la série génératrice est définie, pour tout $t \in [0, \sqrt{2}]$ par $G_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$.
- Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
 - Déterminer la loi de X .
27. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$.
- Déterminer par deux méthodes la loi de $X + Y$ (dont une démonstration de cours).
 - Déterminer la loi de X sachant $X + Y = n$.
28. On souhaite évaluer la proportion de pièces défectueuses lors d'une production. La production de pièces s'arrête dès la découverte d'une pièce défectueuse. On suppose que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est égale à $p = \frac{1}{4}$. On notera X le nombre de pièces produites et F la proportion de pièces défectueuses.
- Exprimer F en fonction de X .
 - Reconnaître la loi de X .
 - Déterminer $E(F)$.
29. Soit X une variable aléatoire entière de série génératrice G_X . De quel événement $\frac{G_X(1)+G_X(-1)}{2}$ est-il la probabilité ?
30. Soit $p \in]0, 1[, q = 1 - p$ et X la variable aléatoire définie par $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = (n + 1)p^2 q^n \end{cases}$
- i. Justifier que X est d'espérance finie.
 - ii. Dériver deux fois $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et son développement en série entière. En déduire le DSE de $x \mapsto \frac{2x}{(1-x)^3}$
 - iii. Calculer $E(X)$.
 - (b) i. Justifier que X^2 est d'espérance finie.
 - ii. Dériver $x \mapsto \frac{2x}{(1-x)^3}$ et son DSE. En déduire le DSE de $x \mapsto \frac{4x^2+2x}{(1-x)^4}$.
 - iii. Calculer $V(X)$.
31. Soit $p_1, p_2 \in]0, 1[, X, Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$. $Z = \min(X, Y)$

- (a) Déterminer $P(X \geq k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
 (b) En déduire $P(Z \geq k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis la loi de Z .
 (c) Interpréter ce résultat en raisonnant en termes de temps de premier succès.
32. Soit $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et X une variable aléatoire entière dont la série génératrice a pour somme, pour tout réel t : $G_X(t) = a(1+t)^m$.
 (a) Calculer la valeur de a .
 (b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
 (c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
 (d) Un jeu consiste à miser 2 puis à lancer deux pièces bien équilibrées. Si on obtient deux fois Pile, on récupère sa mise. Si obtient Pile et Face on récupère sa mise et on gagne 1. Enfin, si on obtient deux fois Face, on récupère sa mise et on gagne 2. On effectue k lancers, avec $k \geq 1$. Notons S_n le gain obtenu dans la n -ième partie et Y le gain total à l'issue des k parties.
 Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y , ainsi que son espérance (on peut calculer les séries génératrices des S_n , puis celle de Y).
33. Soit $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire entière dont la série génératrice a pour somme, pour tout réel t , $G_X(t) = a(t+1)e^t$.
 (a) Calculer la valeur de a .
 (b) Quelle est la loi de probabilité de X ?
 (c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .
34. À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.
 (a) Déterminer la loi de X_1 .
 (b) Déterminer les variances de X_1, X_2 et $X_1 + X_2$ (Remarquer $X_1 + X_2 = n - X_3$)
 (c) En déduire la covariance de X_1 et X_2 . X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?
35. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$. Calculer $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$
36. Soit X une variable aléatoire entière telle que $G_X(t) = k(3+2t^2)^3$. Déterminer la valeur de k puis la loi, l'espérance et la variance de X .
37. Soit X une variable aléatoire entière telle que $G_X(t) = ke^{1+t^2}$. Déterminer la valeur de k puis la loi, l'espérance et la variance de X .
38. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que $P(X \text{ est impair}) < P(X \text{ est pair})$.
39. Soit X, Y deux variables aléatoires entières telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, et que la loi de Y sachant ($X = n$) est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) puis la loi de Y .
40. Soit X_1 une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
 On définit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ la variable aléatoire X_2 par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1(\omega) = 0 \text{ ou si } X_1(\omega) \text{ est impair} \\ \frac{X_1(\omega)}{2} & \text{si } X_1(\omega) \text{ est pair et non nul} \end{cases}$$

- (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_2 .
- (b) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_2 et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.